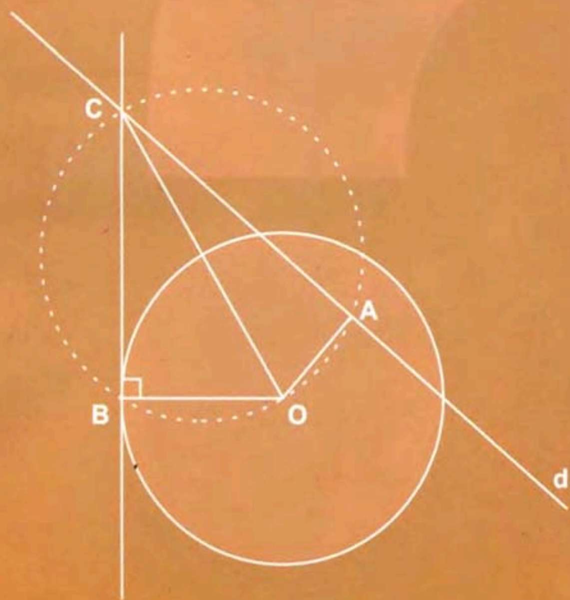
LÊ HẢI CHÂU - NGUYỄN XUÂN QUỲ

BÀI TOÁN QUỸ TÍCH

dễ hay khó?





NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI


Ô
TOÁN HỌC

LÊ HẢI CHÂU - NGUYỄN XUÂN QUỲ

Bài toán
QUỸ TÍCH
DỄ HAY KHÓ?

www.facebook/otoanhoc2911

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI-2001

Vài dòng mở đầu

Tiếp theo cuốn "Bài toán Dựng hình dễ hay khó", cuốn "Bài toán Quỹ tích dễ hay khó" này nhằm đáp ứng yêu cầu cung cấp những kiến thức cần thiết trong việc giải một bài toán quĩ tích.

Cuốn sách gồm ba chương. Chương I đề cập một số vấn đề chung như quỹ tích là gì, các quỹ tích cơ bản, các bước giải một bài toán quỹ tích. Chương II trình bày những bài toán quỹ tích (không xét giới hạn) mà quỹ tích là đường thẳng, đường tròn. Chương III trình bày những bài toán quỹ tích (có xét giới hạn) mà quỹ tích là đoạn thẳng, cung tròn.

Mỗi bài toán đều nêu rõ hướng dẫn và cách giải theo thứ tự: phần thuận, giới hạn, phần đảo, kết luận.

Cuối mỗi chương II và III có nêu lên mối quan hệ khăng khít giữa bài toán quỹ tích và bài toán dựng hình kèm theo một số bài toán minh hoạ.

Cuối sách là mục "Bạn có biết..." nhằm mở rộng kiến thức về quỹ tích và gây hứng thú trong việc học toán.

Các thầy cô giáo và các bậc phụ huynh có thể sử dụng cuốn sách này để hướng dẫn học sinh, con em mình rèn luyện phương pháp học toán sao cho đạt kết quả tốt nhất.

Hà Nội mùa hè 2001

Các tác giả

Chương I

MỘT SỐ VẤN ĐỀ CHUNG

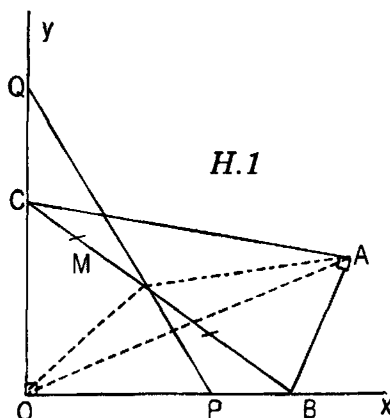
1. Quỹ tích là gì?

Quỹ tích là tập hợp những điểm có một số tính chất chung nào đó và chỉ những điểm có tính chất đó mà thôi.

Một số hình theo định nghĩa đã là quỹ tích, chẳng hạn đường tròn là quỹ tích các điểm cách một điểm cố định một khoảng cách không đổi.

2. Các quỹ tích cơ bản

1) Quỹ tích các điểm cách đều hai điểm A, B là đường trung trực của đoạn thẳng AB.



Ví dụ: Cho điểm A cố định nằm trong góc vuông xOy. Xét tam giác vuông có đỉnh góc vuông là A và hai đầu cạnh huyền BC chạy trên hai cạnh Ox và Oy của góc xOy. Tìm quỹ tích trung điểm M của cạnh huyền BC (hình 1). Nối MO, MA và OA. Do các góc tại A và O đều vuông nên MO = MA (vì cùng bằng nửa cạnh huyền BC). Vì hai điểm O và A cố định mà M cách đều O và A nên quỹ tích của M là đường trung trực của đoạn thẳng OA.

Nhưng điểm A nằm trong góc xOy nên quỹ tích của M

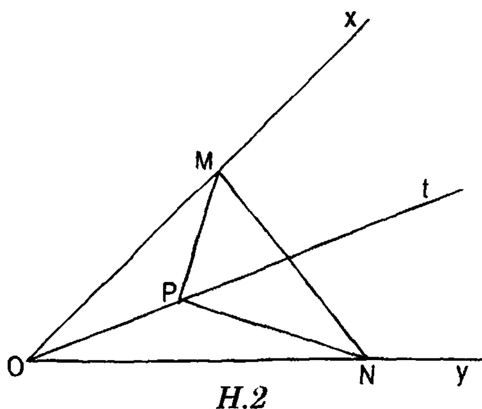
chỉ là đoạn thẳng PQ nằm trong góc xOy (P ∈ Ox, Q ∈ Oy).

2) Quỹ tích các điểm nằm trong góc và cách đều hai cạnh của góc là tia phân giác của góc ấy.

Ví dụ: Cho góc xOy. Một đường thẳng di động cắt Ox ở M và Oy ở N. Tìm quỹ tích giao điểm P các đường phân giác của hai góc M và N (hình 2).

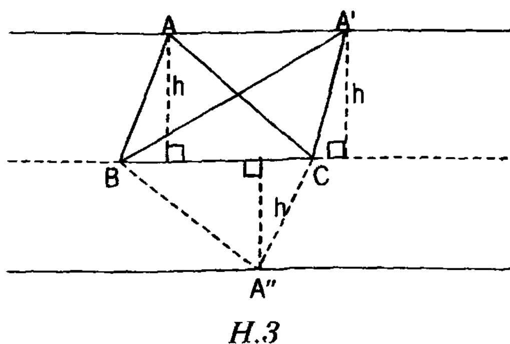
Ba tia phân giác của ba góc $\hat{O}$, $\widehat{M}$ và $\widehat{N}$ trong tam giác OMN cắt nhau tại một điểm P. Do đó quỹ tích giao điểm P là tia phân giác Ot (hình 2) của góc xOy.

3) Quỹ tích những điểm cách một đường thẳng cho trước một khoảng l cho trước gồm hai đường thẳng song song với đường thẳng đã cho và cách đường thẳng đó một khoảng l đã cho.



H.2

Ví dụ. Một tam giác biến thiên ABC có đáy BC cố định và diện tích không đổi. Tìm quỹ tích đỉnh A (hình 3).

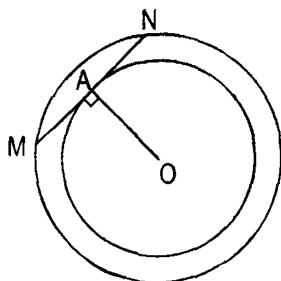


H.3

Do BC cố định và diện tích tam giác không đổi, nên quỹ tích đỉnh A là 2 đường thẳng song song với đường thẳng BC và cách nó một khoảng bằng h. (h là độ dài đường cao hạ từ đỉnh A của ΔABC).

4) Quỹ tích các điểm M sao cho $\widehat{AMB} = 90^\circ$ trong đó AB là một đoạn thẳng cho trước, là đường tròn (I, $\frac{AB}{2}$) với I là trung điểm của AB.

Ví dụ. Cho đường tròn (O) tìm quỹ tích các trung điểm A của tất cả dây cung MN = a (a là một độ dài cho trước) của (O) (hình 4). Nếu M cố định và dây cung MN thay đổi thì quỹ tích của A là gì?

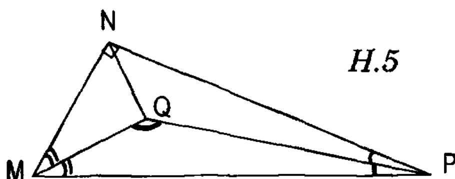


H.4

Kẻ OA ⊥ MN mà MN = a không đổi nên khoảng cách OA cũng không đổi. Vậy quỹ tích của A là đường tròn tâm O bán kính OA không đổi.

Nếu M cố định và O cố định thì quỹ tích của A sẽ là đường tròn đường kính OM.

5) Quỹ tích các điểm M tạo thành với hai mút của đoạn thẳng AM cho trước một góc không đổi $\widehat{AMB} = \alpha$ ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$) là hai cung tròn đối xứng nhau qua AB gọi là cung chứa góc α dựng trên đoạn thẳng AB.



H.5

Ví dụ. Gọi Q là giao điểm ba phân giác trong của tam giác MNP vuông tại N có cạnh huyền cố định. Tìm quỹ tích của Q (hình 5).

Ta có $\hat{M} + \hat{P} = 90^\circ$ mà MQ và PQ theo thứ tự là phân giác các góc M và P nên $\widehat{MQP} = 180^\circ \frac{\hat{M}+\hat{P}}{2}$ 135°.

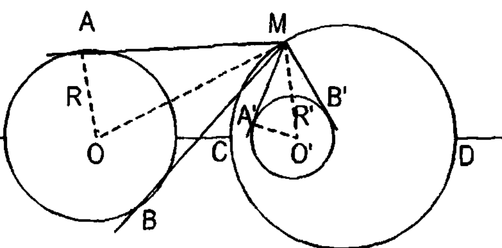
Vậy quỹ tích của Q là hai cung chứa góc 135° dựng trên cạnh huyền cố định MP và đối xứng nhau qua MP.

6) Quỹ tích các điểm M mà tỉ số các khoảng cách đến hai

điểm A và B cố định bằng một số không đổi k ≠1 là một đường tròn gọi là đường tròn Apôlôniut.

Ví dụ. Cho hai đường tròn (O) và (O') bán kính R và R'. Một điểm M chuyển động sao cho các tiếp tuyến MA và MB của đường tròn (O), MA' và MB' của đường tròn (O') thoả mãn $\widehat{AMB} = \widehat{A'MB'}$. Tìm quỹ tích của điểm M (hình 6).

Nối MO, MO', AO và A'O'. Do $\widehat{AMO} = \frac{1}{2}\widehat{AMB}$ và $\widehat{A'MO'} = \frac{1}{2}\widehat{A'MB'}$ nên $\widehat{AMO} = \widehat{A'MO'}$. Lại có: $\widehat{MAO} = \widehat{MA'O'} = 90^o$ (vì các tiếp tuyến vuông góc với bán kính qua tiếp điểm).



H.6

Suy ra hai tam giác MAO và MA'O' đồng dạng nên tỉ số $\frac{MO}{MO'} = \frac{AO}{A'O'} = \frac{R}{R'}$ không đổi.

Vậy quỹ tích của M là đường tròn có đường kính là đoạn thẳng nối hai điểm C và D chia trong và chia ngoài đoạn thẳng đó theo tỉ số $\frac{R}{R'}$ không đổi.

7) Quỹ tích các điểm M có tổng các bình phương của hai khoảng cách đến hai điểm cố định A và B cho trước là một giá trị không đổi: $MA^2 + MB^2 = k^2$ là một đường tròn có tâm là trung điểm của AB và bán kính bằng $\frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - AB^2}$.

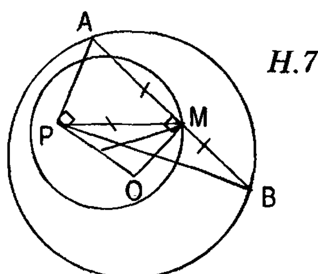
Ví dụ. Từ điểm P cố định nằm trong đường tròn (O, r) ta kẻ hai đoạn thẳng biến thiên PA và PB vuông góc với nhau (A và B nằm trên đường tròn). Tìm quỹ tích trung điểm của

dây cung AB (hình 7).

Nối PM, PO, AO và BO.

Do M là trung điểm của cạnh huyền AB trong tam giác vuông APB nên MA = MP. Vì OM ⊥ AB (bán kính qua trung điểm của một dây cung) nên $\widehat{OMA} = 90^o$.

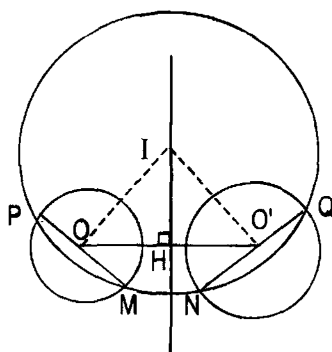
Ta có $MP^2 + MO^2 = MA^2 + MO^2 = OA^2 = r^2$ không đổi.



Như thế tổng các bình phương của hai khoảng cách từ M tới P và O bằng r^2. Vậy quỹ tích của M là đường tròn có tâm là trung điểm của OP và bán kính bằng $\frac{1}{2}\sqrt{2r^2 - OP^2}$.

8) Quỹ tích các điểm M có hiệu các bình phương của hai khoảng cách đến hai điểm cố định là một giá trị không đổi: $/MA^2 - MB^2/ + = k^2$ là một đường thẳng vuông góc với đường thẳng AB tại điểm H cách trung điểm O của AB một khoảng $OH = \frac{k^2}{2AB}$.

Ví dụ. Cho hai đường tròn (O) và (O') bán kính R và R'. Một đường tròn biến thiên (I) chia đường tròn (O) thành hai phần bằng nhau tại M và P, chia đường tròn (O') thành hai phần bằng nhau tại N và Q. Tìm quỹ tích tâm (I) (hình 8).



H.8

Theo bài ra, MP và NQ là các đường kính của hai đường tròn (O) và (O') nên IO ⊥ MP và IO' ⊥ NQ.

Giả sử đường tròn (O') lớn hơn đường tròn (O) ta có:

$IO^2 - IO'^2 = (IM^2 - OM^2) - (IN^2 - O'N^2) = O'N^2 - OM^2 = R'^2 - R^2$ không đổi.

Vậy quỹ tích tâm I là đường thẳng vuông góc với OO' tại điểm H cách trung điểm S của OO' một khoảng $SH = \frac{R'^2 - R^2}{2.OO'}$.

3. Các bước giải một bài toán quỹ tích

1) Ta hãy xét 4 loại mệnh đề sau đây:

(a) Mệnh đề thuận: có A thì có B ($A \Rightarrow B$)

(b) Mệnh đề đảo: có B thì có A ($B \Rightarrow A$)

(c) Mệnh đề phản: không A thì không B ($\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$)

(d) Mệnh đề phản đảo: không B thì không A ($\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$).

Ta thấy ngay rằng:

- Giả thiết của (b) là kết luận của (a), kết luận của (b) là giả thiết của (a);

- Giả thiết của (c) là phủ định giả thiết của (a), kết luận của (c) là phủ định kết luận của (a);

- Giả thiết của (d) là phủ định kết luận của (a), kết luận của (d) là phủ định giả thiết của (a).

Hai mệnh đề thuận (a) và phản đảo (d) là tương đương, hai mệnh đề đảo (b) và phản (c) là tương đương. Như vậy cặp mệnh đề thuận và phản đảo cùng đúng hoặc sai, cặp mệnh đề đảo và phản cũng cùng đúng hoặc cùng sai.

Thuận $\Leftrightarrow$ Phản đảo

Đảo $\Leftrightarrow$ Phản.

2) Khi giải một toán quỹ tích ta phải chứng minh cả phần thuận và phần đảo.

- Phần thuận:

Những điểm có tính chất T thì nằm trên hình H.

- *Phần đảo:*

Những điểm nằm trên hình H thì có tính chất T.

Có thể coi phần thuận là điều kiện cần và phần đảo là điều kiện đủ.

Chẳng hạn xét quỹ tích cơ bản: "Quỹ tích những điểm cách đều hai điểm cố định A và B là đường trung trực của AB".

a) Ta chứng minh rằng mọi điểm cách đều A và B phải nằm trên đường trung trực của AB (thuận).

b) Đảo lại, mọi điểm nằm trên đường trung trực của AB thì cách đều A và B (đảo).

Nếu không có phần đảo thì quỹ tích có thể chỉ là một đoạn của đường trung trực của AB.

Chú ý: Khi một điểm cách đều hai điểm cho trước A và B thì nó nằm trên đường trung trực của AB, chẳng hạn tâm của đường tròn đi qua hai điểm cho trước.

Nếu ta biết hai điểm C và D cách đều A và B thì chúng phải nằm trên đường trung trực của AB, và do hai điểm là đủ để xác định một đường thẳng nên khi nối C và D bằng một đường thẳng thì ta sẽ được đường trung trực của AB.

Ví dụ: a) Đường thẳng nối tâm của một đường tròn với trung điểm của một cung tròn là đường trung trực của dây trương cung đó.

b) Đường thẳng nối tâm của hai đường tròn cắt nhau là đường trung trực của dây cung chung.

c) Muốn chia một đoạn thẳng AB thành hai phần bằng nhau ta xác định hai điểm C và D cùng cách đều A và B rồi kẻ đường thẳng CD (nên lấy hai điểm C và D xa nhau hoặc ở hai bên đoạn thẳng AB).

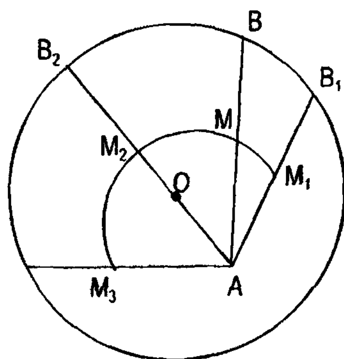
3) *Trong mỗi bài toán quỹ tích thường có hai loại yếu tố:*

yếu tố cố định và yếu tố chuyển động.

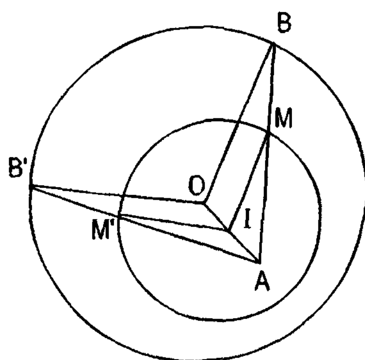
Việc tìm ra mối liên hệ giữa hai yếu tố đó là khâu chủ yếu giúp ta giải bài toán quỹ tích. Ta hãy minh họa điều này bằng ví dụ sau:

"Cho một điểm A cố định nằm trong đường tròn (O; R) và một điểm B chuyển động trên (O; R). Tìm *quỹ tích* trung điểm M của đoạn AB".

Trong bài toán này yếu tố cố định là các điểm O, A và độ dài bán kính R, yếu tố chuyển động là các điểm B và M.



H.9



Trước hết ta hãy xét vài vị trí của B trên đường tròn (O), chẳng hạn B lần lượt ở B_1, B_2, B_3 để phỏng đoán xem các trung điểm M, M_1, M_2, M_3 sẽ nằm trên đường thẳng hoặc đường tròn (hình 9a). Trên hình vẽ ta thấy rằng có thể M sẽ nằm trên một đường tròn nào đó.

Từ đó nghĩ đến việc tìm sự liên hệ giữa hai loại yếu tố cố định và chuyển động. Do O, A cố định và M là trung điểm cạnh AB trong ΔOAB nên nghĩ ngay đến đường trung bình của tam giác, tức là xác định thêm điểm I trung điểm của cạnh OA. I là điểm cố

định. Như thế IM là đường trung bình trong ΔOAB nên $IM = \frac{1}{2}OB$ = không đổi.

Vậy M phải nằm trên đường tròn tâm I cố định bán kính $\frac{R}{2}$.

Ta trình bày cách giải như sau:

Phần thuận: Do đoạn OA cố định nên trung điểm I của nó cũng cố định. Trong tam giác OAB, IM là đường trung bình nên $IM = \frac{1}{2}OB = \frac{R}{2}$ không đổi. Điểm M cách điểm I cố định một khoảng không đổi, vậy M sẽ nằm trên đường tròn $(I, \frac{R}{2})$.

Phần đảo. Gọi M' là một điểm tuỳ ý của đường tròn $(I, \frac{R}{2})$ ta phải chứng minh rằng có một điểm B' để đoạn AB' nhận M' là trung điểm.

Thật vậy, nối AM' rồi kéo dài cắt (O) tại B'. Trong $\Delta OB'A$ do $IM' = \frac{R}{2} = \frac{OB'}{2}$ và I là trung điểm của OA nên IM' là đường trung bình của tam giác này, do đó M' là trung điểm của AB'.

Vậy quỹ tích của M là đường tròn tâm I trung điểm của OA, bán kính bằng $\frac{R}{2}$.

4) Giới hạn của quỹ tích

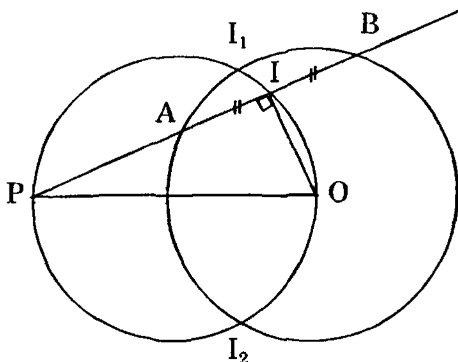
Ta hãy xét bài toán sau đây:

"Cho đường tròn (O) và điểm P cố định ở ngoài đường tròn. Một cát tuyến thay đổi qua P cắt (O) tại hai điểm A và B. Tìm quỹ tích trung điểm I của AB" (hình 10).

Do I là trung điểm của AB nên $OI \perp AB$. Điểm I nhìn

đoạn OP cố định dưới một góc vuông nên I nằm trên đường tròn đường kính OP (thuận).

Nhận xét: Vì I là trung điểm của dây cung AB nên I không thể nằm ngoài đường tròn (O) mà phải nằm trong (O), tức là nằm trên cung nhỏ I_1I_2 của đường tròn đường kính OP, I_1 và I_2 là giao điểm của đường tròn (O) với đường tròn đường kính OP.



H.10

Để chứng minh phần đảo ta phải lấy một điểm I' tuỳ ý trên cung I_1I_2 (chứ không phải lấy I' tuỳ ý trên đường tròn đường kính OP vì I' phải nằm trong (O)). Nối P với I' đường thẳng PI' cắt (O) tại A' và B', ta phải chứng minh rằng I' là trung điểm của dây cung A'B'. Thật vậy do góc OI'P vuông tức là OI' ⊥ A'B' nên I' là trung điểm của dây cung A'B'.

Thành thử cách giải bài toán quỹ tích này sẽ như sau:

- *Phần thuận:* I là trung điểm của AB thì I sẽ nằm trên đường tròn đường kính OP.

Giới hạn. I phải nằm trên cung I_1I_2 phía trong đường tròn (O).

- *Phần đảo:* I' là điểm tuỳ ý nằm trên cung I_1I_2 phía trong (O) thì I' là trung điểm của dây cung A'B' thuộc cát tuyến PA'B'.

Kết luận: Quỹ tích của I là cung I_1I_2 thuộc đường tròn đường kính OP nằm phía trong đường tròn (O).

5) *Tóm lại*, các bước để giải một bài toán quỹ tích là:

. Nếu bài toán không xét giới hạn quỹ tích thì phải chứng minh hai phần thuận và đảo.

- Nếu bài toán có xét giới hạn quỹ tích thì phải chứng minh:

- Phần thuận, giới hạn;
- Phần đảo, kết luận.

4. Phương pháp quỹ tích tương giao

1) Phương pháp rất tổng quát này được dùng khi cách giải của một bài toán hình học quy về xác định một điểm. Chẳng hạn muốn vẽ một đường tròn ta phải tìm tâm của nó, muốn dựng một hình bất kì ta tìm cách xác định một tam giác luôn gắn liền với hình đó và để có tam giác ta đặt một cạnh, một trung tuyến, v.v... có độ dài cho trước và tìm một đỉnh.

Nguyên tắc của phương pháp này là: Điểm cần tìm phải thoả mãn một số điều kiện. Bỏ qua một trong các điều kiện thì điểm cần tìm ở trên một quỹ tích H. Lấy lại điều kiện thứ nhất và bỏ qua điều kiện khác thì điểm cần tìm lại ở trên một quỹ tích H'. Do đó điểm cần tìm vừa phải ở trên H vừa phải ở trên H' nên phải là giao điểm của hai quỹ tích H và H'.

Nhờ phương pháp này mà việc biện luận bài toán được dễ dàng, tức là giúp ta nghiên cứu được tất cả trường hợp có thể xảy ra. Do H và H' là đường thẳng hoặc đường tròn nên có những nguyên tắc tổng quát sau:

Trường hợp thứ nhất: H và H' đều là đường thẳng.

Nói chung có một nghiệm. bài toán vô nghiệm nếu H và H' song song với nhau và có vô số nghiệm nếu H và H' trùng nhau.

Trường hợp thứ hai: H là đường thẳng và H' là đường tròn.

Gọi d là khoảng cách từ tâm đường tròn đến đường thẳng và R là bán kính đường tròn.

Bài toán có 2 nghiệm nếu d < R, có một nghiệm nếu d = R và vô nghiệm nếu d > R.

Trường hợp thứ ba: H và H' đều là đường tròn.

Bài toán có 2 nghiệm nếu khoảng cách giữa hai tâm bao hàm giữa hiệu và tổng hai bán kính, có 1 nghiệm trong trường hợp giới hạn (trừ khi H và H' trùng nhau) và vô nghiệm trong các trường hợp khác.

2) Một số ví dụ minh hoạ phương pháp này.

Ví dụ 1. Tìm trên một đường thẳng d một điểm M cách đều hai đường thẳng m và n cho trước.

Đường thẳng d là quỹ tích đầu tiên H của điểm M. Bỏ qua d, điểm M phải ở trên quỹ tích những điểm cách đều m và n. Ở đây có 2 trường hợp phải xét:

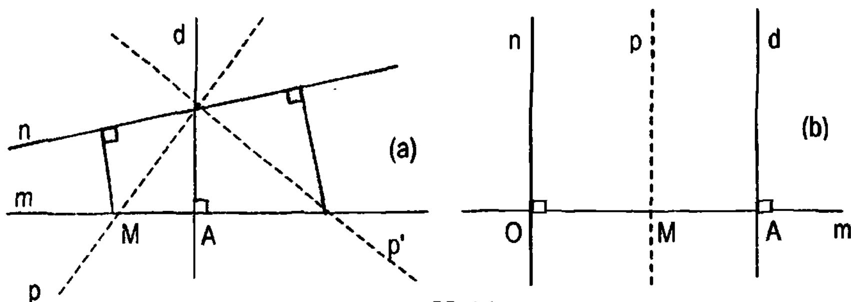
a) m và n cắt nhau. Quỹ tích H' gồm hai phân giác p và p' và M là giao điểm của hai phân giác này với d.

Nói chung bài toán có 2 nghiệm. Bài toán chỉ có 1 nghiệm nếu d song song với một trong hai phân giác p hoặc p' và d sẽ vuông góc với phân giác kia. Khi đó d tạo với m và n một tam giác cân.

Nếu d trùng với một trong hai phân giác thì có vô số nghiệm. Khi đó d sẽ là phân giác của một trong các góc do m và n tạo thành.

b) m và n song song. Quỹ tích thứ hai H' sẽ là đường thẳng song song cách đều p. Bài toán có 1 nghiệm nếu d và p cắt nhau, vô nghiệm nếu d và p song song, khi đó d sẽ song song với m và n, có vô số nghiệm nếu d trùng với p, khi đó d sẽ là đường thẳng song song và cách đều m và n.

Ví dụ 2. Cho hai đường thẳng m và n và một điểm A *trên đường thẳng m.* Tìm trên m một điểm M cách đều A và đường thẳng n. Nếu từ điểm A ta kẻ đường thẳng d vuông góc với m thì điểm M sẽ cách đều các đường thẳng n và d. Điểm M phải tìm là giao điểm của m và của quỹ tích những điểm cách đều n và d vuông góc với m tại A.



H.11

Để xác định quỹ tích thứ hai ta xét 2 trường hợp:

a) d và n cắt nhau. Khi đó n không vuông góc với m (hình 11a).

Quỹ tích sẽ là hai phân giác p và p', bài toán luôn có 2 nghiệm hình vì m không thể song song với p' mà không không vuông góc với p, vô lý.

b) d và n song song (hình 11b). Khi đó m và n vuông góc với nhau.

Quỹ *tích thứ hai là một đường thẳng p* song song và cách đều d và n. Chỉ có 1 điểm M duy nhất, đó là trung điểm của OA.

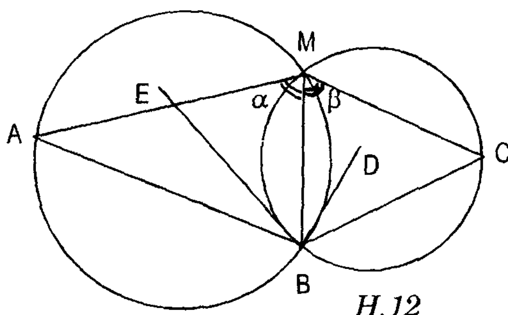
Lưu ý. Đây cũng là cách giải bài toán sau:

"Vẽ một đường tròn có tâm trên m, đi qua điểm A của m và tiếp xúc với đường thẳng n".

Ví dụ 3. Tìm phía trong góc ABC một điểm M mà từ đó ta nhìn hai đoạn thẳng AB và BC dưới hai góc cho trước α

và β (hình 12).

Do $\widehat{AMB} = \alpha$ nên quỹ tích của M là cung chứa góc α dựng trên đoạn AB. Lại có $\widehat{BMC} = \beta$ nên quỹ tích của M là cung chứa góc β dựng trên đoạn BC. Như vậy M phải là giao điểm của hai quỹ tích này tức là giao điểm của hai cung chứa góc α và β.



H.12

Ta kẻ các tiếp tuyến BD và BE với hai cung chứa góc này. Mọi điểm của cung chứa góc thứ nhất nằm trong góc ABD và mọi điểm của cung chứa góc thứ hai nằm trong góc CBE. Mà hai góc này phải có một phần chung, điều này dẫn tới:

$\widehat{ABD} + \widehat{CBE} > \widehat{ABC}$ hay $180° - \alpha + 180° - \beta > \widehat{ABC}$, hay $\widehat{ABC} + \alpha + \beta < 360°$.

Chương II

BÀI TOÁN QUỸ TÍCH

(không xét giới hạn)

I. QUỸ TÍCH LÀ ĐƯỜNG THẲNG, ĐƯỜNG TRÒN

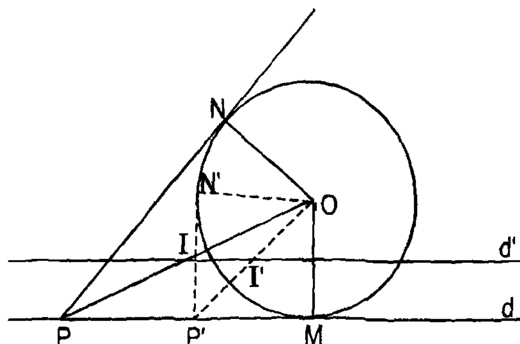
10 BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

Bài 1. *Cho đường tròn (O) cố định tiếp xúc với đường thẳng d tại điểm M cố định trên đường tròn. P là điểm di chuyển trên đường thẳng d. Kẻ tiếp tuyến PN với đường tròn ($N \neq M$). Gọi I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác PMN. Khi P chuyển trên đường thẳng d thì quỹ tích của I là gì?*

Hướng dẫn. Trước hết cần xác định tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔPMN. Dễ dàng thấy được tứ giác PNOM nội tiếp đường tròn đường kính PO, từ đó suy ra tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔPMN là trung điểm đoạn OP.

Cách giải

- *Thuận*: Theo tính chất của tiếp tuyến, ta có: $\widehat{OMP} = \widehat{ONP} = 1v$. Tứ giác PNOM có $\widehat{OMP} + \widehat{ONP} = 1v + 1v = 2v$ nên tứ giác nội tiếp (hình 13) đường tròn đường kính PO, suy ra ΔPMN nội tiếp đường tròn tâm I (với I là trung điểm đoạn OP) do đó có



H.13

IO = IM tức là I nằm trên đường trung trực d' của OM. Vậy khi P di chuyển trên d thì tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔPMN là đường trung trực d', trừ giao điểm của d' với OM.

- *Đảo*: Lấy I' bất kì trên d'. Nối O với I' rồi kéo dài cắt d tại P'. Theo tính chất đường trung bình của tam giác ta có I' là trung điểm của OP'. Từ P' kẻ tiếp tuyến P'N', có tứ giác P'MON' nội tiếp đường tròn tâm I', do đó I' là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔP'MN'.

- *Kết luận*: Khi P di chuyển trên đường thẳng d thì quỹ tích của I là đường trung trực d' của đoạn OM (trừ giao điểm của d' với OM).

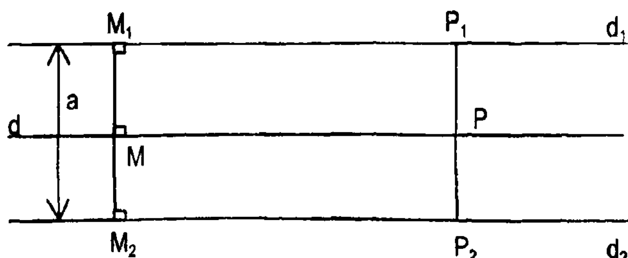
Bài 2. Tìm quỹ tích các điểm cách đều hai đường thẳng song song cho trước.

Hướng dẫn. Giả sử hai đường thẳng song song cho trước là d_1, d_2. Trên d_1 lấy điểm M_1, qua M_1 dựng đường vuông góc với d_1 rồi kéo dài cắt d_2 tại M_2, đoạn $M_1M_2 = a$ vuông góc với d_1d_2 gọi là khoảng cách giữa d_1, d_2. Nếu M là trung điểm của M_1M_2, ta phải tìm quỹ tích của M cách đều d_1, d_2. Để làm bài, cần dựa vào khái niệm hình chữ nhật.

Cách giải

- *Thuận:* Giả sử hai đường thẳng song song đã cho là d_1, d_2 và khoảng cách giữa hai đường thẳng là a (hình 14).

Lấy M_1 bất kì trên d_1 dựng qua M_1 đường vuông góc với d_1 rồi kéo dài cắt



H.14

d_2 tại M_2, ta có đoạn M_1M_2 = a vuông góc với d_1d_2 gọi là khoảng cách giữa d_1,d_2.

Giả sử M thuộc M_1M_2 là điểm cách đều d_1, d_2 tức là

$MM_1 = MM_2 = \frac{a}{2}$ (không đổi).

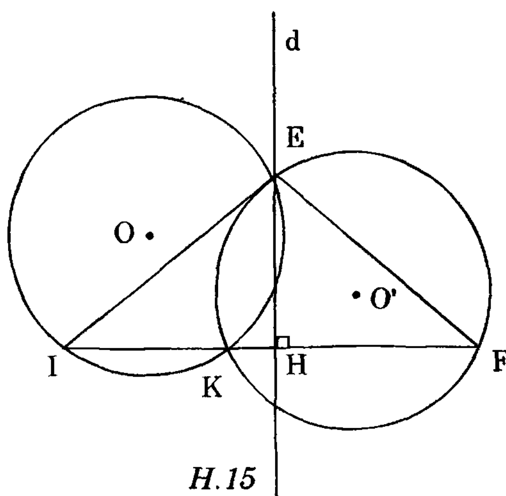
Vậy điểm M cách đều d_1, d_2 nằm trên đường thẳng d cách đường thẳng d_1, d_2 một khoảng $\frac{a}{2}$ (có thể nói M nằm trên đường thẳng d cách đều hai đường thẳng d_1, d_2)

- *Đảo*: Ngược lại, lấy điểm P bất kì trên đường thẳng d rồi vẽ $PP_1 \perp d_1$, $PP_2 \perp d_2$. Các tứ giác MM_1P_1P và MPP_2M_2 là hình chữ nhật nên $PP_1 = \frac{a}{2}$, $PP_2 = \frac{a}{2}$, do dó P cách đều hai đường thẳng d_1, d_2.

Kết luận: Quỹ tích các điểm cách đều hai đường thẳng song song cho trước d_1, d_2 là đường thẳng d song song và cách đều d_1, d_2.

Bài 3. *Trên một đường thẳng cho ba điểm I, K, F cố định theo thứ tự đó. Hai đường tròn (O), (O') thay đổi bán kính bằng nhau: đường tròn (O) đi qua hai điểm I và K, đường tròn (O') đi qua hai điểm K và F. Hai đường tròn này cắt nhau ở điểm thứ hai E. Tìm quỹ tích điểm E khi hai đường tròn thay đổi.*

Hướng dẫn. Hai đường tròn bằng nhau cắt nhau tại K và E thì hai cung KE trên hai đường tròn này bằng nhau, từ đó suy ra các góc bằng



H.15

nhau để có một tam giác cân. Hãy dựa vào tính chất của tam giác cân để tìm quỹ tích điểm E.

Cách giải

- *Thuận*: Theo giả thiết, hai đường tròn (O) và (O') có bán kính bằng nhau (hình 15) và cắt nhau ở hai điểm K, E nên hai cung KE trên đường tròn (O) và trên đường tròn (O') bằng nhau, do đó có: $\widehat{KIE} = \widehat{KFE}$, vậy ΔIEF cân tại E. Theo tính chất của tam giác cân, suy ra E nằm trên trung trực d của đoạn IF.

- *Đảo*: Cần phải xét hai trường hợp như sau:

a) Điểm K không trùng với trung điểm H của đoạn IF. Với mọi điểm E trên d (E ≠ H) ta đều vẽ được đường tròn (O) qua I, K, E và đường tròn (O') qua F, K, E. Vì ΔIEF cân nên số đo hai cung EK trên hai đường tròn bằng nhau, suy ra hai đường tròn này có bán kính bằng nhau (hai tam giác cân OKE, O'KE có góc ở đỉnh bằng nhau và có cùng cạnh đáy KE nên bằng nhau, suy ra OE = O'E). Trong trường hợp này điểm E chạy trên đường thẳng d trừ điểm H.

b) Điểm K trùng với trung điểm H của IF. Xét các đường tròn (O), (O') có đường kính IE và FE thì E trùng với K. Trong trường hợp này điểm E chạy trên toàn bộ đường trung trực d của đoạn IF.

- *Kết luận*: Quỹ tích giao điểm E của hai đường tròn (O), (O') bằng nhau thay đổi đi qua I, K và K, F là đường trung trực d của đoạn IF.

Bài 4*. Cho tam giác cân ABC (AB = AC). Một điểm M di chuyển trên đáy BC. Qua M kẻ đường vuông góc với BC cắt cạnh AB (hoặc tia BA) tại I và cắt tia CA (hoặc cạnh AC) tại K. Tìm quỹ tích trung điểm P của đoạn IK.*

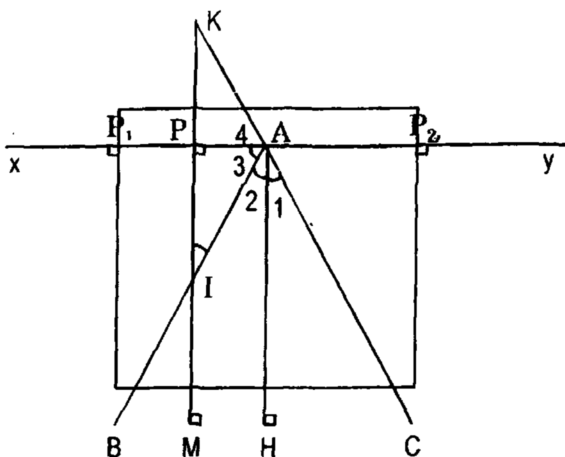
Hướng dẫn. Từ A hạ các đường vuông góc với BC và KI, sẽ tạo ra một hình chữ nhật. Do đó có:

- PM = AH: không đổi (vì là đường cao của ΔABC cân đã cho), từ đó vận dụng quỹ tích của những điểm P cách BC một khoảng không đổi.

- Hoặc PM // AH suy ra $\widehat{KAP} = \widehat{IAP}$, do đó có P nằm trên phân giác góc ngoài của góc A.

Cách giải

- *Thuận:* Kẻ đường cao AH, do PM ⊥ BC (theo gt) suy ra PM // AH do đó có $\widehat{K} = \widehat{A_1}$ (góc đồng vị), $\widehat{I} = \widehat{A_2}$ (góc so le trong), mà $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (do tính chất của tam giác cân) nên $\widehat{K} = \widehat{I}$ hay ΔAKI cân tại đỉnh A (hình 16).



H.16

Vì P là trung điểm của KI nên trung tuyến AP cũng sẽ là phân giác của $\widehat{KAI}$ trong ΔAKI suy ra $\widehat{A_3} = \widehat{A_4}$. Vậy P nằm trên phân giác xy của góc ngoài của A (lưu ý rằng), vì M chỉ chạy trên BC nên P chạy trên đoạn P_1P_2 của phân giác góc ngoài của A).

- *Đảo*: Lấy P bất kì trên P_1P_2. Hạ P'M' ⊥ BC, cắt AB tại I' và CA tại k', ta phải chứng minh P' là trung điểm của đoạn K'I'.

Thật vậy, do AP' là phân giác của ΔK'AI' cân, nên AP' cũng là trung tuyến trong ΔK'AI' cân. Theo tính chất của tam giác cân suy ra P'K' = P'I'.

- *Kết luận*: Quỹ tích trung điểm P của đoạn IK là đoạn

P_1P_2 của tia phân giác góc ngoài của A.

Chú ý: Bạn đọc nên tự làm khi sử dụng PM = AH: không đổi để thấy được một cách giải khác của bài toán này.

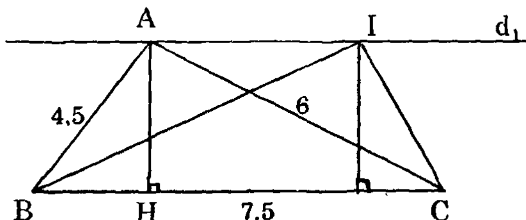
Bài 5*. Cho tam giác ABC có AC = 6cm, AB = 4,5cm và BC = 7,5cm.*

Tìm quỹ tích điểm I sao cho diện tích tam giác ABC luôn bằng diện tích tam giác IBC.

Hướng dẫn. Từ các số liệu đã cho về độ dài các cạnh có thể suy ra ΔABC vuông tại A, do đó tính được độ dài đường cao AH. Dựa vào điều đã cho: $S_{ABC} = S_{IBC}$ sẽ tìm được độ dài khoảng cách từ I đến BC rồi suy ra quỹ tích điểm I.

Cách giải

- *Thuận*: Ta có ΔIBC có cạnh là BC cho trước, $S_{BIC} = S_{ABC}$ không đổi, nên đường cao của ΔBIC ứng với cạnh BC có độ dài h bằng độ dài đường cao AH của ΔABC (hình 17).



H.17

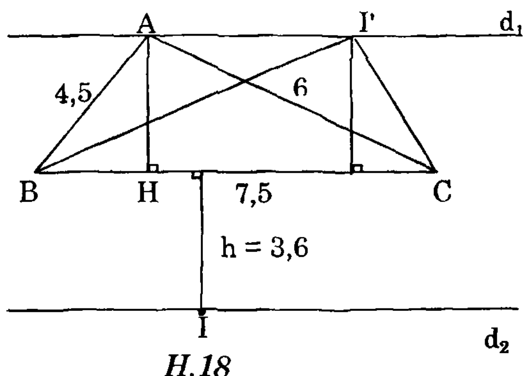
Ta thấy $4,5^2 + 6^2 = 20,25 + 36 = 56,25$ và $7,5^2 = 56,25$ theo định lí đảo của định lí Pitago ta có ΔABC vuông tại A.

Ta có BC. AH = AC. AB suy ra $AH = \frac{AC.AB}{BC} = \frac{6.4,5}{7,5} = 3,6(cm)$.

Vậy điểm I luôn cách đường thẳng BC cho trước một khoảng không đổi là 3,6 (cm) nên I chạy trên d_1 với d_1 // BC và cách BC một khoảng h = 3,6 (cm).

- *Đảo*: Lấy I' bất kì thuộc đường thẳng d_1 sao cho d_1 // BC và d_1 cách BC một khoảng h = 3,6 (cm). Khi đó $S_{I'BC} = \frac{1}{2}BC.h = \frac{1}{2}.BC.3,6$ mà $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.AH = \frac{1}{2}BC.3,6$ suy ra $S_{I'BC} = S_{ABI}$.

- *Kết luận*: Quỹ tích điểm I sao cho diện tích tam giác ABC bằng diện tích tam giác IBC là hai đường thẳng d_1, d_2 đối xứng nhau qua BC (hình 18) cùng song song với BC và cách BC một khoảng không đổi h = 3,6 (cm)



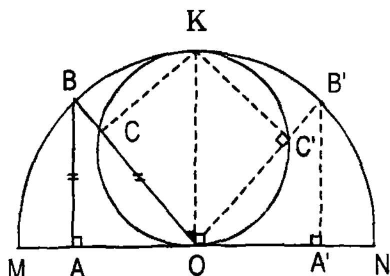
H.18

Bài 6. *Cho nửa đường tròn đường kính MON. Từ một điểm A bất kì trên MN vẽ đường vuông góc với MN. Đường vuông góc này gặp nửa đường tròn tại B. Trên OB lấy OC = AB. Tìm quỹ tích điểm C khi A chuyển động trên MN.*

Hướng dẫn. Qua O hãy dựng đường vuông góc với MN cắt nửa đường tròn tại K (hình 19) ta được BA // KO rồi suy ra $\widehat{C} = \widehat{A} = 1v$. Từ đó tìm được quỹ tích của C.

Cách giải

- *Thuận*: Qua O dựng đường vuông góc với MN, cắt nửa đường tròn tại K, ta có OK cố định và BA // KO. Xét hai tam giác BAO và OCK có BA = CO (theo gt), $\widehat{B} = \widehat{O}$ (góc so le trong). BO = KO (bán kính nửa đường tròn), vậy $\Delta BAO = \Delta OCK$ (c.g.c), suy ra $\widehat{C} = \widehat{A} = 1v$.



H.19

Ta thấy C nhìn OK cố định dưới góc KCO bằng 1v nên C nằm trên đường

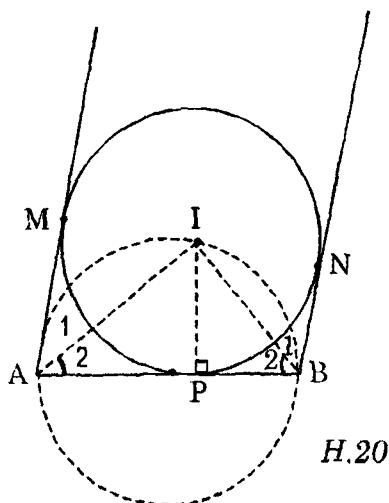
tròn đường kính OK.

- *Đảo*: Lấy C' bất kì trên đường tròn đường kính OK. Nối O với C' cho cắt (O) tại B', kẻ B'A' ⊥ MN, ta phải chứng minh B'A' = OC'.

Thật vậy, hai tam giác vuông OC'K và B'A'O có OK = OB' và $\widehat{C'OK} = \widehat{A'B'O}$ (góc so le trong), nên hai tam giác này bằng nhau (cạnh huyền và góc nhọn bằng nhau), suy ra B'A' = OC'.

- *Kết luận:* Quỹ tích điểm C khi A chuyển động trên MN là đường tròn đường kính OK (K là trung điểm của $\overset{\frown}{MN}$).

Bài 7. Cho đoạn thẳng AB, đường tròn (I) thay đổi nhưng luôn tiếp xúc với AB sao cho các tiếp tuyến kẻ từ A và B đến đường tròn (I) song song với nhau. Gọi M và N là các tiếp điểm của các tiếp tuyến vẽ từ A và B và gọi P là tiếp điểm của đường tròn (I) với AB. Tìm quỹ tích tâm I.



H.20

Hướng dẫn. Vận dụng tính chất của hai tiếp tuyến cùng xuất phát từ một điểm ở ngoài đường tròn đến đường tròn đó để suy ra $\widehat{AIB} = 90^o$. Từ đó, với giả thiết AB đã cho là cố định suy ra quỹ tích của I.

Cách giải

- *Thuận:* Theo giả thiết thì AM // BN (hình 20), suy ra $\widehat{A} + \widehat{B} = 180°$ (hai góc trong cùng phía bù nhau).

Theo tính chất của hai tiếp tuyến cùng xuất phát từ một điểm đến đường tròn, ta có $\widehat{A_2} = \frac{\widehat{A}}{2}$ và $\widehat{B_2} = \frac{\widehat{B}}{2}$. Do đó

$\widehat{A_2} + \widehat{B_2} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2} = \frac{180°}{2} = 90°$.

Trong ΔAIB có $\widehat{A_2} + \widehat{B_2} = 90°$ nên $\widehat{AIB} = 90°$.

Điểm I nhìn đoạn AB đã cho dưới một góc vuông nên I nằm trên đường tròn đường kính AB (trừ hai điểm A và B vì khi đó đường tròn (I) suy biến thành một điểm).

- *Đảo:* Lấy I' bất kì thuộc đường tròn đường kính AB, hạ I'P' vuông góc với AB, rồi vẽ đường tròn tâm I' bán kính I'P'. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến AM' và BN'. Ta phải chứng minh hai tiếp tuyến này song song.

Thật vậy, do $\widehat{AIB} = 90°$ nên $\widehat{A_2} + \widehat{B_2} = 90°$, suy ra $\widehat{A} + \widehat{B} = 180°$ (hai góc trong cùng phía bằng 180°) nên AM' // BN'.

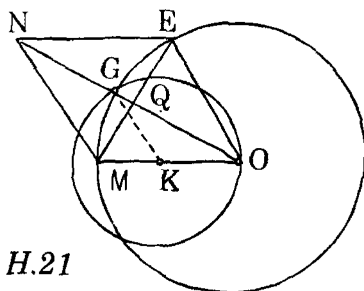
- *Kết luận*: Quỹ tích tâm I là đường tròn đường kính AB trừ hai điểm A và B.

Bài 8. *Cho đường tròn (O, R), một điểm M cố định trên đường tròn, một điểm E di động trên đường tròn đó. Dựng hình thoi OMNE. Tìm quỹ tích trọng tâm G của tam giác MNE.*

Hướng dẫn. Dựa vào tính chất của trọng tâm một tam giác và tính chất về đường chéo của hình thoi có $NG = \frac{1}{3}NO$ (1).

Mặt khác do A, O cố định nên xác định được điểm K sao cho

$MK = \frac{1}{3}MO$ (2), từ đó có K cố định. Từ (1) và (2) theo định lí Talet đảo có KG // MN và $\frac{KG}{MN} = \frac{2}{3}$, mà MN = MO nên KG = $\frac{2}{3}MO = \frac{2}{3}R$. Do đó suy ra quỹ tích của trọng tâm G.



H.21

Cách giải

- *Thuận*: Ta có G là trọng tâm của ΔMNE (hình 21) nên $NG = \frac{2}{3}NQ$ với Q là trung điểm của ME. Do OMNE là hình thoi nên NQ = QO hay $NQ = \frac{1}{2}$ NO, suy ra $NG = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} NO = \frac{1}{3} NO$ (1).

Gọi K là một điểm trên đoạn OM sao cho $MK = \frac{1}{3}OM$ (2).

Vì M và O cố định nên K cố định, từ (1), (2) có: $\frac{NG}{NO} = \frac{MK}{MO} = \frac{1}{3}$, nên theo định lí Talet đảo ta có KG // MN và $\frac{KG}{MN} = \frac{2}{3}$.

Vì tứ giác OMNE là hình thoi nên MN = MO = R, suy ra $KG = \frac{2}{3}MN = \frac{2}{3}R$. Vậy trọng tâm G nằm trên đường tròn *tâm K bán kính bằng* $\frac{2}{3}R$.

- *Đảo*: Lấy một điểm G' tuỳ ý trên đường tròn $(K, \frac{2}{3}R)$. Kéo

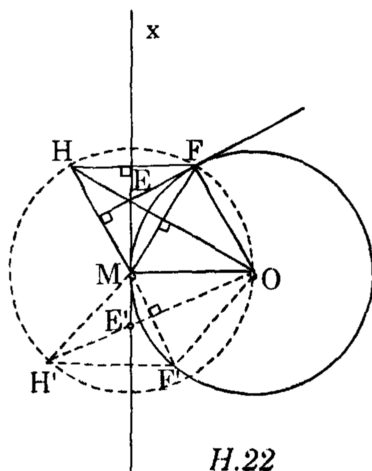
dài OG' một đoạn $G'N' = \frac{1}{3}OG'$. Dựng $MQ \perp OG'$ và MQ' cắt đường tròn (K, $\frac{2}{3}R$) tại E'. Ta phải chứng minh G' là trọng tâm của $\Delta MN'E'$.

Vì $ME' \perp OQ'$ nên Q' là trung điểm đoạn ME', từ đó N'Q' là trung tuyến xuất phát từ đỉnh N' của $\Delta MN'E'$. Vì $G'N' = \frac{1}{2}OG'$ mà $KM = \frac{1}{2}KO$ nên suy ra KG' // MN' và $KG' = \frac{2}{3}MN'$. Vì G' thuộc đường tròn (K, $\frac{2}{3}R$) nên $KG' = \frac{2}{3}R$. Suy ra MN' = R, từ đó MN'E'O là hình thoi và G' là trọng tâm của $\Delta MN'E'$.

- *Kết luận.* - Quỹ tích trọng tâm G là đường tròn (K, $\frac{2}{3}R$).

Bài 9. *Cho đường tròn (O, R), một điểm M cố định trên đường tròn. Qua M dựng tiếp tuyến Mx. Trên Mx lấy một điểm E và từ E kẻ tiếp tuyến thứ hai EF với đường tròn. Tìm quỹ tích trực tâm H của tam giác MEF khi E chạy trên tiếp tuyến Mx.*

Hướng dẫn. Trước hết hãy vẽ hình để xác định trực tâm H của ΔMEF rồi chứng minh rằng MHFO là hình thoi, từ đó suy ra quỹ tích của trực tâm H.



H.22

Cách giải

- *Thuận:* (hình 22).

Nối O với E ta có EO ⊥ MF (hình 22). Từ M hạ đường vuông góc với EF, đường này cắt OE tại H, ta có trực tâm H của ΔMEF.

Ta có OF ⊥ EF (vì EF là tiếp tuyến), MH ⊥ FE (vì H là trực tâm của ΔMEF), do đó OF // MH. Ta lại có OM ⊥ ME (vì Mx là tiếp tuyến), FH ⊥ ME (vì H là trực tâm của ΔMEF), do đó OM // FH.

Tứ giác OMHF có OF //MH, OM // FH và OF = OM nên là hình thoi, suy ra MH = MO = R: không đổi.

H cách M cố định một đoạn bằng R, nên H nằm trên đường tròn tâm M bán kính R.

- *Đảo:* Lấy H' bất kì thuộc đường tròn (M, R). Nối H' với O cắt Mx tại E'. Kẻ tiếp tuyến E'F' với (O, R). Do E'M = E'F' nên E'H' là phân giác của $\widehat{ME'F'}$, từ đó suy ra E'H' là trung trực của đoạn MF' hay H'E' ⊥ MF'.

Điểm H' nằm trên trung trực của MF' nên H'F' = H'M = R = OF' = OM, do đó OMH'F' là hình thoi, nên OM // H'F', nhưng OM ⊥ Mx suy ra H'F' ⊥ Mx.

Như vậy H'F' ⊥ ME' và H'E' ⊥ MF' nên H' là trực tâm của ΔME'F'.

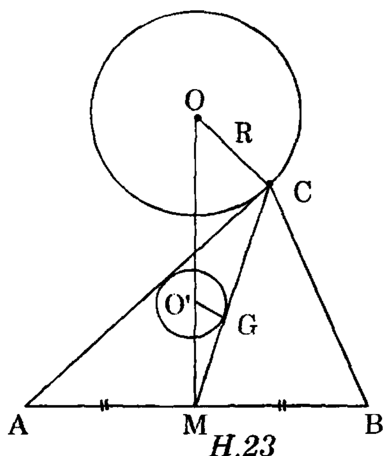
- *Kết luận:* Quỹ tích trực tâm H là đường tròn (M, R).

Bài 10*. Cho đường tròn (O, R) và một đoạn thẳng AB ở bên ngoài đường tròn. Điểm C di chuyển trên đường tròn. Tìm quỹ tích trọng tâm G của tam giác ABC.*

Hướng dẫn. Trước hết hãy vẽ hình để xác định trung tuyến CM từ đó xác định trọng tâm G của ΔABC và chú ý rằng $\frac{MG}{MC} = \frac{1}{3}$ rồi vận dụng định lí Talet trong tam giác sẽ suy ra được quỹ tích của G.

Cách giải

- *Thuận:* Gọi M là trung điểm của đoạn AB (hình 23), qua trọng tâm G kẻ đường thẳng song song với CO cắt MO ở O'; ta có GO' // CO suy ra $\frac{MO'}{MO} = \frac{GO'}{CO} = \frac{MG}{MC} = \frac{1}{3}$, suy ra O' cố định và GO' = $\frac{R}{3}$. Như vậy là điểm G cách O' cố định một khoảng bằng $\frac{R}{3}$ không đổi, suy ra G nằm trên đường tròn (O', $\frac{R}{3}$).



H.23

- *Đảo*: Lấy G' bất kì thuộc đường tròn (O', $\frac{R}{3}$) với O' là điểm chia trong đoạn MO theo tỉ số 1:2.

Trên tia MG lấy điểm C sao cho MC = 3MG. Ta có $\frac{MO'}{MO} = \frac{MG}{MC} = \frac{1}{3}$ suy ra O'G // OC, do đó OC = 3O'G = $3.\frac{R}{3} = R$ như vậy là C thuộc đường tròn (O, R).

- *Kết luận*: Quỹ tích trọng tâm G của ΔABC là đường tròn (O', $\frac{R}{3}$) với O' là điểm chia trong đoạn MO theo tỉ số 1:2 (trong đó M là trung điểm của AB).

5 BÀI TOÁN TỰ GIẢI

ĐỀ BÀI

Bài 1*. Cho hình bình hành MNPQ, E là trung điểm của cạnh PQ. Kéo dài ME cắt NP tại F. Tìm quỹ tích của F khi cạnh MN cố định còn cạnh PQ trượt trên đường thẳng a song song với đường thẳng MN.*

Bài 2*. Cho đường thẳng d và một đoạn thẳng PQ = m không đổi trượt trên một đường thẳng khác d' / / d. Biết rằng đầu mút P chạy trên một đường tròn (O, r), tìm quỹ tích đầu mút Q của đoạn thẳng PQ.*

Bài 3*. Cho tam giác vuông AOB cân tại O. Gọi M là một điểm bất kì trên cạnh huyền AB và P, Q theo thứ tự là hình chiếu của M trên OA, OB. Tìm quỹ tích trung điểm N của đoạn thẳng PQ.*

Bài 4*. Cho đường tròn (O) có đường kính AB, qua B dựng tiếp tuyến xBy với đường tròn, CD là một đường kính bất kì. Gọi giao điểm của AC và AD với xy theo thứ tự là M, N. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác MCDN. Tìm quỹ tích của điểm I khi đường kính CO quay quanh O.*

Bài 5*. Cho đường tròn (O, R) cố định và điểm A cố định thuộc đường tròn, B là điểm di động trên đường tròn. Tìm quỹ tích các điểm M sao cho B là trung điểm của AM.*

HƯỚNG DẪN CÁCH GIẢI

Bài 1. *Hướng dẫn*

- Lưu ý rằng từ giả thiết EP là đường trung bình của tam giác FMN. Suy ra EM = EF. Hạ các đường vuông góc

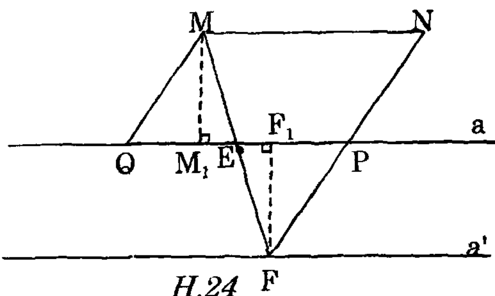
MM_1 và FF_1 với đường thẳng a và chứng minh chúng bằng nhau. Từ đó suy ra quỹ tích của F.

- *Thuận*: Do $EQ = EP = \frac{1}{2}MN$ (gt) nên EP là đường trung bình của tam giác FMN. Suy ra EM = EF (hình 24).

Từ M kẻ $MM_1 \perp a$, từ F kẻ $FF_1 \perp a$. Ta có:

$\triangle MM_1E = \triangle FF_1E$ (cạnh huyền, góc nhọn). Suy ra $MM_1 = FF_1$.

Vậy F chạy trên đường thẳng a' đối xứng với đường thẳng MN qua đường thẳng a đã cho.



H.24

- *Đảo:* Lấy F' bất kì trên a'. Nối F'M cắt a tại E' còn F'N cắt a tại P'. Lấy điểm Q' đối xứng với P' qua E', ta phải chứng minh rằng MNP'Q' là hình bình hành.

Thật vậy tứ giác MP'F'Q' có E là trung điểm của hai đường chéo MF' và Q'P' nên là hình bình hành, suy ra QM // P'F' tức là QM // PN. Tứ giác MNP'Q' có hai cặp cạnh đối song song MN // Q'P' và QM // PN là hình bình hành.

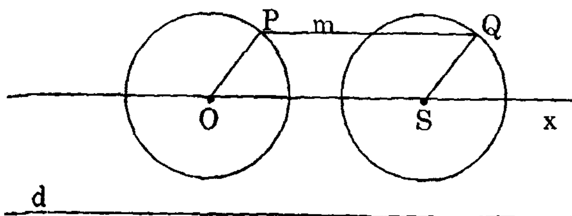
- *Kết luận:* Quỹ tích của F là đường thẳng a' đối xứng với đường thẳng MN qua đường thẳng a.

***Bài 2**. Hướng dẫn* - Từ O dựng tia Ox // d trên Ox lấy đoạn OS = m. Sau đó chứng minh tứ giác OPQS là hình bình hành để được SQ = OP = r. Từ đó suy ra quỹ tích của Q.

- *Thuận*: Dựng tia Ox song song với đường thẳng d cho trước. Trên Ox lấy đoạn OS = m, ta được điểm S cố định

(hình 25). Do OS // PQ và OS = PQ = m nên tứ giác OPQS là hình bình hành. Suy ra OP = SQ = r không đổi.

Vậy Q chạy trên đường đường tròn tâm S bán kính bằng r.



H.25

- *Đảo*: Lấy Q' bất kì trên đường tròn (S, r). Nối SQ' và từ O kẻ OP' // SQ' ta phải chứng minh P'Q' = m.Thật vậy, tứ giác OP'Q'S' có một cặp cạnh đối song song và bằng nhau (OP' // SQ' và OP' = SQ' = r) nên là hình bình hành mà OS = m, do đó P'Q' = m.

- *Kết luận:* Quỹ tích của Q là đường tròn (S, r), S nằm trên tia Ox // PQ và OS = m.

Bài 3. Hướng dẫn. Chú ý rằng trung điểm N của QP cũng là trung điểm của OM. Từ N kẻ NF ⊥ AB, dễ dàng chứng minh được $NF = \frac{OH}{2}$ với OH là đường cao của ΔAOB, từ đó suy ra quỹ tích trung điểm N của PQ.

- *Thuận:* Dễ dàng nhận thấy rằng OPMQ là hình chữ nhật (hình 26) nên trung điểm N của PQ cũng chính là trung điểm của OM.

Hạ NF ⊥ AB và OH ⊥ AB ta có $NF = \frac{OH}{2}$. Biết O cố định nên OH không đổi. Như vậy N luôn cách AB một đoạn không đổi nên N nằm trên đường thẳng xy song song với AB cách AB một đoạn bằng $\frac{OH}{2}$. Lưu ý rằng, do M chỉ chạy trên AB nên N chỉ chạy trên EI.

- *Đảo*: Lấy N' bất kì trên EI. Nối ON' cắt AB tại M' rồi hạ M'P' ⊥ OB, M'Q' ⊥ OA, ta phải chứng minh N' là trung điểm của P'Q'.

Bạn đọc tự chứng minh.

- *Kết luận*: Quỹ tích trung điểm N của đoạn PQ là đoạn EI song song với AB cách AB một đoạn bằng $\frac{OH}{2}$ (OH là đường cao của tam giác vuông cân AOB).

H.26

Bài 4. *Hướng dẫn*. Trước hết cần chứng minh rằng tứ giác MCDN nội tiếp đường tròn. Tâm I của đường tròn này là giao điểm của trung trực IH của MN và đường trung trực IO của CD. Sau đó chứng minh AHIO là hình bình hành, suy ra IH = OA = R (R là bán kính đường tròn O đã cho), từ đó tìm được quỹ tích của điểm I.

H.27

- *Thuận:* Ta có $\widehat{C_1} = \widehat{N}$, mà $\widehat{C_1} + \widehat{C_2} = 2v$ nên $\widehat{N} + \widehat{C_2} = 2v$, do đó tứ giác MCDN nội tiếp được đường tròn (hình 27).

Tâm I của đường tròn này là giao điểm của trung trực

IH của đoạn MN và *trung trực* IO *của đoạn* CD.

Ta có IH ⊥ xy và AO ⊥ xy suy ra AO // HI.

Vì H là trung điểm MN nên HM = HA suy ra ΔAHM cân nên $\widehat{A_1} = \widehat{M_1}$ mà $\widehat{C_1} = \widehat{N}$ và $\widehat{M} + \widehat{N} = 1v$ do đó $\widehat{A_1} + \widehat{C_1} = 1v$. *Trong tam giác* CAK có $\widehat{A_1} + \widehat{C_1} = 1v$ nên $\widehat{K} = 1v$ hay HA ⊥ CD, mặt khác có IO ⊥ CD suy ra AH // IO.

Tứ giác AHIO có AO // HI và AH // IO nên là hình bình hành, do đó IH = OA = R: không đổi. Vậy tâm I của đường tròn ngoại tiếp tứ giác MCDN nằm trên x'y'// xy cách xy một đoạn bằng IH = R.

- *Đảo*: Bạn đọc tự chứng minh.

- *Kết luận:* Quỹ tích tâm I của đường tròn ngoại tiếp tứ giác MCDN là đường thẳng x'y' song song với xy và cách xy một đoạn bằng R.

Bài 5. *Hướng dẫn*. Qua A dựng đường kính AOI để tạo ra tam giác AIM, trong đó OB là đường trung bình của ΔAIM, từ đó suy ra quỹ tích của M.

- *Thuận:* Qua A vẽ đường kính AOI. Vì A cố định nên I cũng cố định (hình 28).

Nối I với M, trong tam giác AIM ta có AB = BM (theo gt) và OA = OI nên OB là đường trung bình của ΔAIM, suy ra IM = 2OB = 2R: không đổi.

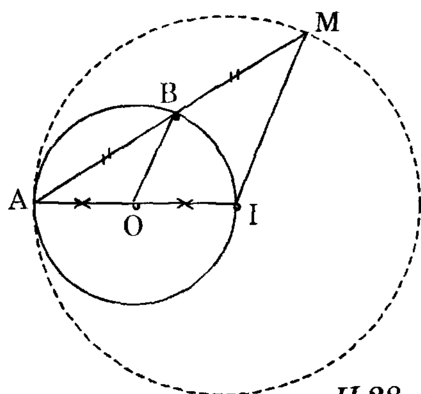
Điểm M có tính chất cách I cố định một đoạn không đổi bằng 2R nên khi B chạy trên đường tròn O thì M chạy trên đường tròn *tâm* I *bán kính* bằng 2R (trừ B trùng với A).

- *Đảo:* Lấy M'bất kì thuộc đường tròn (I, 2R), nối A với M' rồi lấy B' là trung điểm của AM', ta phải chứng minh B' nằm trên đường tròn (O, R).

Thật vậy, trong tam giác AIM' ta có B'A = B'M' và OA = OI nên OB' là đường trung bình của ΔAIM' vậy OB' =

$\frac{IM'}{2} = \frac{2R}{2} = R$, do đó B' phải nằm trên đường tròn (O, R).

- *Kết luận*: Quỹ tích của điểm M khi B di động trên đường tròn (O,R) là đường tròn (I, 2R) trong đó I là điểm đối tâm của A trong (O).



H.28

II. QUAN HỆ GIỮA TOÁN QUĨ TÍCH VÀ TOÁN DỰNG HÌNH

Giữa toán dựng hình và toán quỹ tích có tác dụng hữu cơ với nhau. *Phép dựng hình hỗ trợ đắc lực cho việc giải toán quỹ tích*, nhất là đối với những bài toán quỹ tích tương đối khó, ngược lại để làm trọn vẹn bài toán dựng hình phải dùng một số quỹ tích cơ bản. Ở phần trên đã trình bày về "phương pháp quỹ tích tương giao" giúp tìm một điểm thoả mãn một số điều kiện cho trước, đó cũng chính là bài toán dựng hình. Chẳng hạn bài toán dựng một tam giác ABC biết độ dài ba cạnh a, b, c.

Sau khi dựng đoạn thẳng BC = a, ta phải xác định đỉnh A của tam giác thoả mãn hai điều kiện: A cách B một khoảng bằng c, và cách C một khoảng bằng b. Thực chất đây là tìm giao điểm của hai quỹ tích, tức là tìm giao điểm của hai cung tròn tâm B bán kính c và tâm C bán kính b.

Rõ ràng giữa dựng hình và quỹ tích có mối tương hỗ mật thiết.

10 BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài 1. *Cho đường tròn (O) và một đường thẳng d ở ngoài đường tròn. Tìm trên d một điểm E sao cho tiếp tuyến EG với (O) có độ dài a cho trước.*

Bài 2. *Từ một điểm A cho trước ở ngoài đường tròn (O) dựng một cát tuyến AMN sao cho tổng AM + AN = m, là một độ dài bằng m cho trước.*

Bài 3. *Cho ba điểm A, B, C. Dựng một tứ giác MNPQ sao cho ba điểm này là trung điểm của ba cạnh bằng nhau của tứ giác.*

Bài 4. *Dựng hình vuông MNPQ biết đỉnh M và trung điểm S của cạnh PN.*

Bài 5. *Dựng đường tròn qua hai điểm C và D cho trước và chia một đường tròn (O, R) cho trước thành hai nửa bằng nhau.*

Bài 6. *Cho hai điểm E và F nằm cùng phía của một đường thẳng d cho trước. Tìm một điểm I nằm ngoài d nhìn EF dưới một góc β cho trước và hai cạnh của góc EIF chắn trên d một đoạn có độ dài a cho trước.*

Bài 7. *Dựng một tam giác MNP vuông tại M nội tiếp trong đường tròn (I) sao cho hai cạnh của tam giác đi qua hai điểm A và B cố định nằm trong (I).*

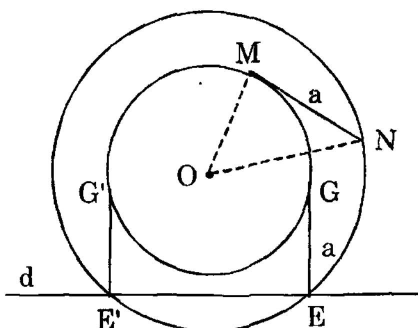
Bài 8. *Cho điểm E nằm trong góc nhọn mAn. Dựng qua E một cát tuyến PEQ (P $\in$ Am, Q $\in$ An) sao cho tổng AP + AQ bằng một độ dài p cho trước.*

Bài 9. *Tìm trên cạnh đáy BC của tam giác ABC một điểm M sao cho khi kẻ từ M những đường thẳng song song với cạnh kia ta được một hình bình hành APMQ có chu vi 2p cho trước.*

Bài 10. *Tìm một điểm M sao cho chân các đường vuông góc hạ từ M xuống các cạnh của một tam giác ABC luôn thẳng hàng.*

SƠ LƯỢC CÁCH GIẢI

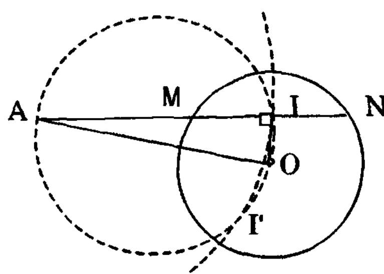
Bài 1. Điểm E phải tìm là giao điểm của đường thẳng d với quỹ tích của đầu mút các tiếp tuyến có độ dài a. Để dựng nó ta đặt trên một tiếp tuyến bất kì một đoạn MN = a rồi vẽ đường tròn tâm O bán kính ON (hình 29).



H.29

Nếu d cắt đường tròn (O, ON) thì có 2 điểm E và E' ở ngoài (O) tức có hai nghiệm hình EG và E'G'.

Bài 2. Gọi I là trung điểm của MN ta có AM + AN = (AI - MI) + (AI + IN) = 2AI = a, do đó AI = $\frac{a}{2}$. Khoảng giữa A và I bằng $\frac{a}{2}$ nên quỹ tích của I là đường tròn tâm A bán kính $\frac{a}{2}$ (hình 30). Mặt khác do OI ⊥ MN nên $\widehat{AIO} = 90^o$, vậy quỹ tích của I là đường tròn đường kính AO.

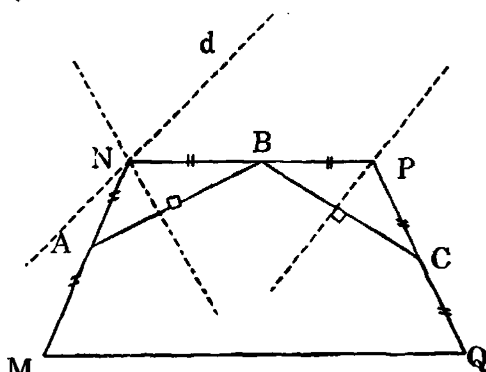


H.30

Dựng hai quỹ tích này ta sẽ được giao điểm I. Từ I sẽ dựng được cát tuyến AMN.

Nếu tiếp tuyến với (O) kẻ từ A có độ dài m thì $AO > \frac{a}{2} > m$, bài toán có 2 nghiệm hình vì hai quỹ tích có 2 giao điểm I và I' đều nằm trong (O). Nếu $AO = \frac{q}{2}$ thì hai quỹ tích tiếp xúc nhau nên bài toán chỉ có một nghiệm hình. Nếu $\frac{q}{2} \leq m$ thì hai quỹ tích có 2 giao điểm nằm trên hoặc ngoài (O) do đó bài toán vô nghiệm.

Bài 3. Giả sử bài toán đã dựng được, tức là tứ giác MNPQ có A, B, C theo thứ tự là trung điểm của ba cạnh bằng nhau MN = NP = PQ (hình 31). Ta thấy ngay hai đỉnh N và P của tứ giác phải nằm trên các trung trực của AB và BC (quỹ tích cơ bản). Do đó bài toán quy về: dựng đoạn thẳng NP có hai đầu ở trên hai đường thẳng cho trước và nhận điểm B cho trước làm trung điểm. Vậy chỉ cần dựng đường thẳng d đối xứng với trung trực của BC qua B.



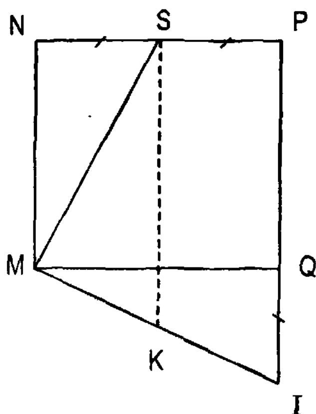
H.31

Nếu A, B, C không thẳng hàng thì bài toán có 1 nghiệm hình.

Nếu A, B, C thẳng hàng thì bài toán hoặc là vô nghiệm hoặc có vô số nghiệm (khi AB = BC).

Bài 4. Ta kéo dài PQ về phía Q một đoạn QI = NS =

$\frac{1}{2}$MN (hình 32). Ba tam giác vuông MNS, QPS và MQI bằng nhau (2 cạnh góc vuông bằng nhau). Suy ra tam giác SMI vuông cân. Như vậy ngoài hai điểm M và S cho trước ta xác định thêm điểm thứ ba I.

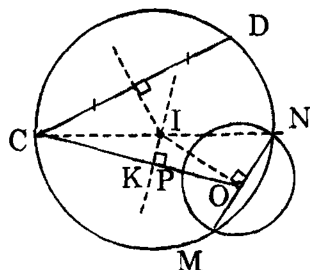


H.32

Gọi K là trung điểm của MI, ta có SK là đường trung bình của hình thang vuông MNPI. Từ dó dựng được đỉnh thứ hai Q đối xứng với M qua SK. Vậy chỉ cần xác định thêm hai đỉnh P, N để được hình vuông MNPQ.

Bài 5. Tâm I của đường tròn cần dựng phải nằm trên trung trực của đoạn CD (hình 33). Hai đường tròn (I) và (O) cắt nhau tại hai điểm M và N với MN là đường kính của (O). Ta có IO ⊥ MN nên: $IC^2 - IO^2 = IN^2 - IO^2 = ON^2 = R^2$.

Theo quỹ tích cơ bản thì I phải nằm trên đường thẳng vuông góc với OC tại P cách trung điểm K của OC một khoảng bằng $\frac{R^2}{2OC}$.



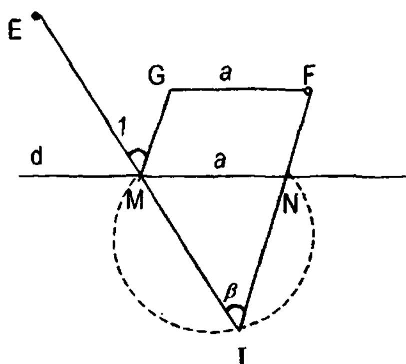
H.33

Vì thế ta nối OC rồi dựng điểm P sao cho PK = $\frac{R^2}{2OC}$. Từ P dựng đường vuông góc với OC cắt trung trực của MN tại I là tâm đường tròn cần dựng.

Bài toán có 1 nghiệm hình nếu ba điểm O, C, D không thẳng hàng.

Bài 6. Giả sử I là điểm đã dựng được. Nếu từ F ta kẻ đường song song với d và đặt đoạn FG = a thì tứ giác FGMN là hình bình hành (hình 34). nên MG // NF, do đó $M_1 = \beta$ (đồng vị). Từ đó xác định được điểm M và suy ra điểm I. Ta có cách dựng sau:

Qua F dựng đường thẳng song song với d và đặt FG = a. Dựng cung chứa góc β trên đoạn MN cắt d ở M. Sau đó từ F dựng đường thẳng song song với GM cắt EM kéo dài ở I.



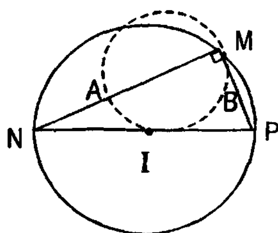
H.34

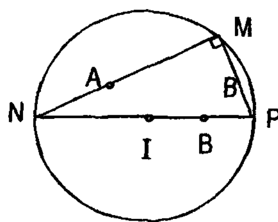
Bài toán có 2 nghiệm hình, 1 nghiệm hình hoặc vô nghiệm nếu cung chứa góc β cắt d tại 2 điểm, tiếp xúc với d hoặc không cắt d.

Đặc biệt nếu EF//d và EF = a thì bài toán vô nghiệm.

Bài 7. Ta xét 2 trường hợp (với điều kiện I, A, B không thẳng hàng):

a) A và B nằm trên một cạnh góc vuông (hình 35a).





H.35

Điểm M phải thoả mãn 2 điều kiện:

- nằm trên đường tròn (I)

- nằm trên đường tròn đường kính AB.

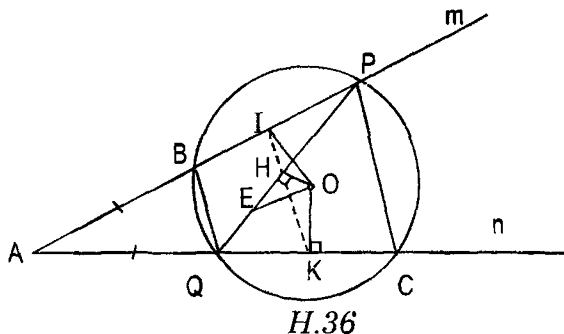
Do đó M phải là giao điểm của hai đường tròn này.

b) A và B nằm trên một cạnh góc vuông và cạnh huyền (hình 35b).

Khi đó đỉnh M phải là giao điểm của NA với đường tròn (I) và đỉnh P phải là giao điểm của NI với (I).

Bài 8. Giả sử cát tuyến PQ đã dựng được (hình 36). Trên Am lấy điểm B và trên An lấy điểm C sao cho AB = AQ và AC = AP. Ta có BQ // PC và BP = QC. Suy ra tứ giác BPCQ là hình thang cân. Nếu vẽ đường tròn (O) ngoại tiếp tứ giác này và hạ OI ⊥ BP, OK ⊥ QC thì IB = IP, KQ = KC. Do đó AI + AK = AP + AQ, suy ra AI = AK = $\frac{p}{2}$. Ta xác định được hai điểm I và K.

Gọi H là giao điểm của IK và PQ. Xét tam giác BPQ có IH là đường trung bình, suy ra OH ⊥ PQ. Do đó H sẽ nằm trên đường tròn đường kính BO.



H.36

Ta có cách dựng sau:

- Trên Am và An theo thứ tự lấy hai điểm I và K sao cho AI = AK = $\frac{p}{2}$.

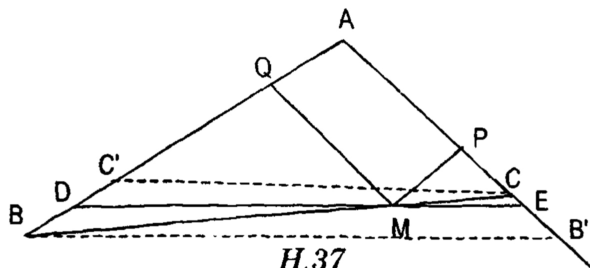
- Từ I và K dựng các đường vuông góc với Am và An cắt nhau tại O;

- Dựng đường tròn đường kính EO cắt IK tại H;
- Nối EH cắt Am và An theo thứ tự tại P và Q.

Ta được cát tuyến PQ cần dựng.

Tuỳ thuộc vào giao điểm của đường tròn đường kính EO với IK mà bài toán có 2 nghiệm hình, 1 nghiệm hình hoặc vô nghiệm.

Bài 9. Điểm M trước hết phải nằm trên cạnh đáy BC. Ngoài ra M phải thuộc quỹ tích những điểm mà khi kẻ những đường thẳng song song với hai cạnh của góc A ta có MP + MQ = p. Do đó M nằm trên cạnh đáy DE của tam giác cân ADE mà AD = AE = p (hình 37).



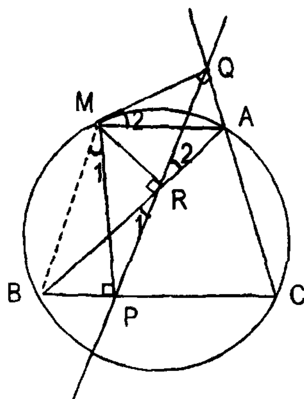
H.37

Vậy M là giao điểm của BC với DE.

Nếu ta lấy AC' = AC, AB' = AB thì đoạn DE phải nằm giữa hai đường thẳng CC' và BB' song song với nó, do đó độ dài p phải nằm giữa hai độ dài AC và AB.

Nếu DE // BC tức là tam giác ABC cân thì bài toán sẽ vô nghiệm hoặc có vô số nghiệm hình.

Bài 10. Từ M ta hạ các đường vuông góc MP, MQ, MR xuống ba cạnh của tam giác ABC



H.38

(hình 38). Ta giả sử rằng ba điểm P, Q, R nằm trên một đường thẳng.

Ta có $\widehat{BRP} = \widehat{ARQ}$ (đối đỉnh). Từ P và R ta nhìn MB dưới một góc vuông nên tứ giác MBPR nội tiếp được. Suy ra $\widehat{R_1} = \widehat{M_1}$ (cùng chắn cung BP). Tứ giác MQAR cũng nội tiếp được nên $\widehat{R_2} = \widehat{M_2}$. Suy ra $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$. Do đó $\widehat{MBP} = \widehat{MAQ}$ (vì là góc phụ của hai góc bằng nhau $\widehat{M_1}$ và $\widehat{M_2}$)

Mà $\widehat{MAQ} + \widehat{MAC} = 180^o$. Suy ra $\widehat{MBP} + \widehat{MAC} = 180^o$.

Vậy tứ giác AMBC nội tiếp được và M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Đường thẳng PRQ chính là *đường thẳng Simson*.

Chương III

BÀI TOÁN QUỸ TÍCH

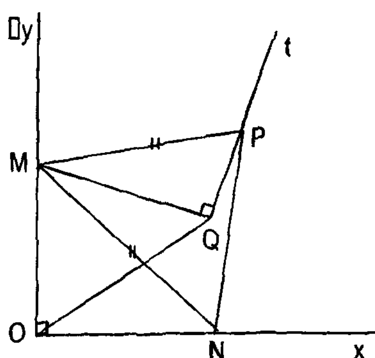
(*có xét giới hạn*)

I. QUỸ TÍCH LÀ ĐOẠN THẲNG, CUNG TRÒN

10 BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

Bài 1. *Cho góc vuông xOy. Một tam giác đều MNP biến thiên có đỉnh M cố định trên Oy, đỉnh N di động trên Ox. Tìm quỹ tích đỉnh thứ ba P.*

Hướng dẫn. Cho đỉnh N trùng với điểm O (hình 39) thì tam giác đều MNP sẽ thành tam giác đều MOQ. Sau đó chứng minh hai tam giác MQP và MON bằng nhau để suy ra $\widehat{MQP}$ vuông. Do Q cố định nên tìm được quỹ tích của P.



H.39

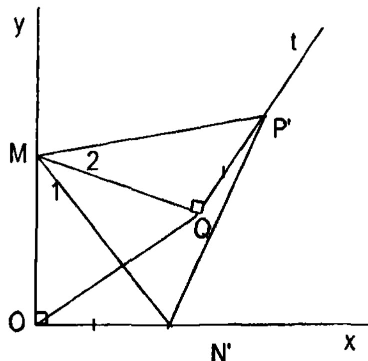
Cách giải

- *Thuận:* Cho đỉnh N trùng với điểm O. Khi đó tam giác đều MNP sẽ thành tam giác đều MOQ. Do O và M cố định nên Q cũng cố định (hình 39).

Ta có $\Delta MQP = \Delta MON$ (c.g.c). Suy ra $\widehat{MQP} = \widehat{MON} = 90^o$. Vậy đỉnh P chạy trên đường vuông góc với MQ tại Q.

- *Giới hạn:* Do P và O nằm ở hai phía của đường thẳng MQ nên P chỉ chạy trên tia Qt.

- *Đảo:* Lấy P' bất kì trên Qt. Trên Ox lấy đoạn ON' = QP', ta phải chứng minh rằng ΔMP'N' là tam giác đều (hình 40).



H.40

Thật vậy do MQ = MO, QP' = ON' và $\widehat{MQP'} = \widehat{MON}$ nên hai tam giác vuông MQP' và MON' bằng nhau. Suy ra MP' MN'. Vì $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ nên $\widehat{OMQ} = \widehat{N'MP'} = 60^\circ$. Do đó $\widehat{MN'P'} = \widehat{MP'N'} = 60^\circ$.

Vậy ΔMP'N' đều.

- *Kết luận:* Quỹ tích đỉnh thứ ba P là tia Qt ⊥ MQ.

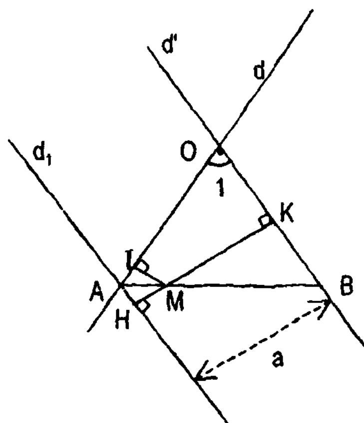
Bài 2. *Tìm quỹ tích những điểm M mà tổng các khoảng cách từ điểm đó tới hai đường thẳng cắt nhau bằng một độ dài a cho trước.*

Nếu thay tổng các khoảng cách bằng hiệu các khoảng cách thì quỹ tích sẽ là gì?

Hướng dẫn: Hãy xét trường hợp điểm M nằm ở một trong bốn góc do hai đường thẳng d và d' cắt nhau tạo thành (hình 41). Vì MI + MK = a, nên kẻ thêm đường thẳng d_1 // d' và cách d' một khoảng đúng bằng a rồi áp dụng định lí: "Tổng các khoảng cách từ một điểm nằm trên đáy của một tam giác cân đến hai cạnh bên bằng đường cao thuộc cạnh bên", đường cao ở đây có độ dài bằng đoạn a.

Cách giải

- *Thuận:* Kẻ đường thẳng d_1 // d' và cách d' một khoảng bằng a. Gọi A là giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d. Theo bài ra ta có MI + MK = a. KM kéo dài cắt d_1 tại H ta có MH + MK = a. Từ đó MI = MH tức là M cách đều hai cạnh của góc dAd_1 nên M nằm trên tia phân giác của góc này.



H.41

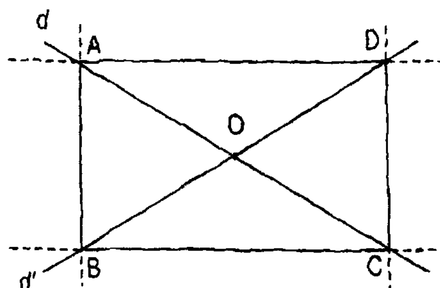
- *Giới hạn:* Do M nằm trong góc O_1 nên M chỉ chạy trên đoạn AB là đáy của tam giác cân OAB (B là giao điểm của tia phân giác của góc dAd_1 với d').

- *Đảo:* Lấy điểm M' trên đoạn AB ta kẻ M'I' ⊥ d, M'K' ⊥ d' và M'H' ⊥ d_1.

Ta có: ⊿AM'I' = ⊿AM'H' (cạnh huyền, góc nhọn). Suy ra M'H' = M'I'.

Mà M'H' + M'K' = a nên M'I' + M'K' = a.

Tương tự ta xét tiếp các trường hợp M' ở các góc còn lại.



H.42

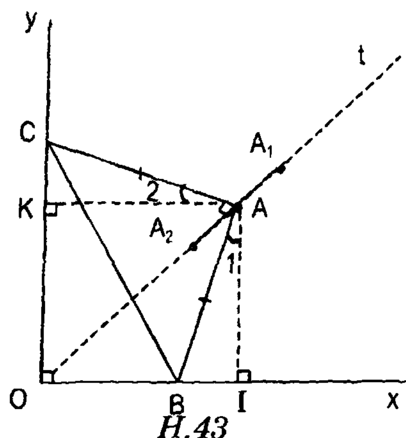
- *Kết luận:* Quỹ tích của M là 4 đoạn thẳng AB, BC, CD và DA tạo thành

một hình chữ nhật ABCD (hình 42).

Chú ý: Nếu thay tổng các khoảng cách bằng hiệu các khoảng cách thì quỹ tích sẽ là 8 tia thuộc phần kéo dài các cạnh của hình chữ nhật ABCD (nét chấm chấm).

Bài 3. *Cho góc vuông xOy. Một tam giác vuông cân ABC có diện tích không đổi và hai đầu B và C của cạnh huyền lần lượt chạy trên Ox và Oy. Tìm quỹ tích đỉnh A.*

Hướng dẫn: Hãy xem đỉnh A khi chuyển động có cách đều hai cạnh của góc xOy không, tức là xét xem AI có bằng AK không (hình 43), AI và AK là các khoảng cách từ A đến Ox và Oy. Muốn vậy phải chứng minh rằng hai tam giác vuông AIB và AKC bằng nhau.



H.43

Cách giải

- *Thuận:* Từ A kẻ AI ⊥ Ox, AK ⊥ Oy ta có IAK = 90° (AIOK là hình chữ nhật) = BAC. Từ đó $A_1 = A_2$ (cùng phụ với $\widehat{BAK}$).

ΔAIB = ΔAKC (c. huyền, g. nhọn). Suy ra AI = AK. Như vậy đỉnh A cách đều hai cạnh của góc vuông xOy nên A nằm trên tia phân giác Ot của góc vuông xOy.

- *Giới hạn:* Vì ΔABC có diện tích không đổi nên khi B tới O hoặc C tới O thì A tới A_1, còn khi ABOC là hình vuông thì A tới A'_2. Do đó A chỉ chạy trên đoạn A_1A_2 của tia phân giác Ot.

- ***Đảo.*** Lấy điểm A' bất kì trên đoạn A_1A_2 của tia phân giác Ot, ta có A'I' = A'K'. Qua A' kẻ tia A'B' tạo với A'I' góc

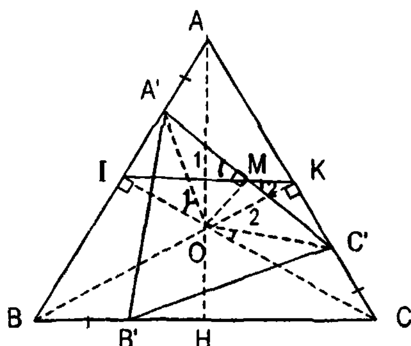
A'_1 và kẻ tia A'C' tạo với A'K' góc A'_2 sao cho $\widehat{A_1'} = \widehat{A_2'}$. Nối B'C' ta phải chứng minh tam giác A'B'C' vuông cân tại A'.

Mặt khác do tứ giác A'K'OI' là hình chữ nhật nên $\widehat{K'A'I'} = 90°$. Suy ra $\widehat{C'A'B'} = 90°$, tức là tam giác A'B'C' vuông cân tại A'.

- *Kết luận:* Quỹ tích đỉnh A là đoạn A_1A_2 nằm trên tia phân giác Ot của góc vuông xOy.

Bài 4. *Cho tam giác đều ABC. Trên các cạnh của tam giác lấy ba điểm A', B', C' (A' ∈ AB, B' ∈ BC, C' ∈ AC) sao cho AA' = BB' = CC'. Tìm quỹ tích trung điểm M của đoạn A'C' khi A' và C' chạy trên các cạnh của tam giác ABC mà vẫn thoả mãn AA' = CC'.*

Hướng dẫn. Gọi IK là đường trung bình của ΔABC, hãy chứng minh rằng M nằm trên IK, tức là ba điểm I,M,K thẳng hàng. Trước tiên có thể xét trường hợp đặc biệt khi A' tới I thì C' tới K và M sẽ nằm trên IK (hình 44).



H.44

Cách giải

- *Thuận:* Do ΔABC đều nên các đường cao hạ từ B và C sẽ đi qua K và I là trung điểm của AC và AB. Ta có O là tâm đường ngoại tiếp ΔA'B'C' đều.

Xét trường hợp đặc biệt khi A' và C' lần lượt trùng với I và K thì M nằm trên IK. Nếu A' không trùng với I thì bốn điểm A', M, O, I nằm trên đường tròn (do OI ⊥ AB và OM ⊥ A'C') nên $\widehat{M_1} = \widehat{O_1}$ (cùng chắn cung IA'). Tương tự $\widehat{M_2} = \widehat{O_2}$

(cùng chắn cung KC').

Xét hai tam giác vuông AIO và OKC bằng nhau vì có: OA = OC (vì ΔABC đều), AI = CK = $\frac{1}{2}$AC, $\widehat{OAI} = \widehat{OCK} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$

Suy ra ◺A'IO = ◺C'KO (c. góc vuông, g. nhọn), nên $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ từ đó $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$. Suy ra ba điểm I, M, K thẳng hàng, tức là M nằm trên đường trung bình IK của Δ ABC.

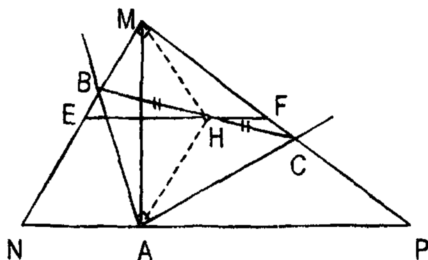
- *Giới hạn:* Do ΔA'B'C' nằm trong ΔABC nên M chỉ chạy trên IK, trừ hai điểm I và K.

- *Đảo:* Lấy điểm M' bất kì trên IK (M' khác I và K). Qua M' kẻ đường vuông góc với OM' cắt AB tại A' và AC tại C'. Ta phải chứng minh rằng M' là trung điểm của A'C' và AA' = CC' (Bạn đọc tự chứng minh).

- *Kết luận:* Quỹ tích trung điểm M của A'C' là đường trung bình của Δ ABC đều, trừ hai đầu I và K.

Bài 5. *Cho tam giác MNP vuông tại M có đường cao MA. Một góc vuông đỉnh A quay xung quanh A sao cho hai cạnh góc vuông cắt MN và MP theo thứ tự tại B và C. Tìm quỹ tích trung điểm H của cạnh huyền BC.*

Hướng dẫn: Nối H với M và A chứng minh HM = HA. Từ đó suy ra quỹ tích của H. Lưu ý đến hai vị trí đặc biệt của góc vuông BAC là $\widehat{MAN}$ và $\widehat{MAP}$.



H.45

Cách giải

- *Thuận:* Nối HM và HA (hình 45). Trong tam giác vuông BMC ta có

MH là trung tuyến nên MH = $\frac{1}{2}$BC. Tương tự trong tam giác vuông BAC ta có AH = $\frac{1}{2}$BC. Suy ra HM = HA. Vậy H nằm trên đường trung trực của MA.

- *Giới hạn:* Khi B trùng với M thì C trùng với P, lúc đó H sẽ trùng với trung điểm F của cạnh MP. Khi B trùng với N thì C trùng với M, lúc đó H sẽ trùng với trung điểm E của cạnh MN. Do đó H chỉ chạy trên đoạn EF là đường trung bình của tam giác MNP.

- *Đảo:* Lấy điểm H' bất kì trên đoạn EF. Qua H' kẻ B'C' sao cho H' là trung điểm của B'C' bằng cách lấy H'B' = H'M rồi kéo dài B'H' đến khi cắt MP tại C'. Ta phải chứng minh rằng góc B'AC' vuông tại A.

Thật vậy, do H'B' = H'M = H'A nên ta có H'B' = H'C' = H'A = $\frac{1}{2}$B'C'. Tam giác B'AC' có trung tuyến AH' bằng nửa cạnh B'C' là tam giác vuông tại A.

- *Kết luận:* Quỹ tích của H là đường trung bình EF của tam giác vuông MNP.

Bài 6. ***Cho đường tròn (O, R) và điểm P cố định sao cho PO = 2R. Một điểm A chuyển động trên (O) sao cho tia phân giác góc POA cắt PA tại B. Tìm quỹ tích của B.***

Hướng dẫn. Xét tam giác POA và áp dụng tính chất đường phân giác OB của góc O để suy ra tỉ số $\frac{PB}{PA} = \frac{2}{3}$. Từ đó bằng phương pháp đồng dạng suy ra quỹ tích của B là đường tròn tâm I đồng dạng với đường tròn (O) theo tỉ số đồng dạng $\frac{2}{3}$.

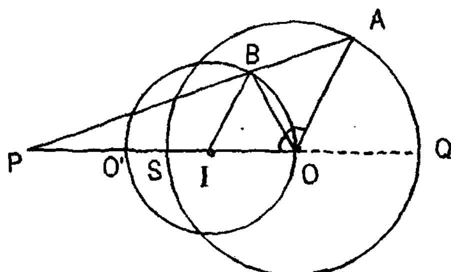
Cách giải

- *Thuận:* Trong tam giác POA, theo tính chất đường phân giác OB của góc POA ta có (hình 46):

$$\frac{BP}{BA} = \frac{OP}{OA} = \frac{2R}{R} = 2$$

Suy ra $\frac{PB}{PA} = \frac{PB}{PB + BA} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$.

Do A chuyển động trên đường tròn (O) nên B sẽ chuyển động trên đường tròn tâm I đồng dạng với (O) trong phép đồng dạng tâm I tỉ số $\frac{2}{3}$, I là điểm trên PO thoả mãn $\frac{PI}{PO} = \frac{2}{3}$. Đường tròn (I) có bán kính bằng $\frac{2}{3}R$.



H.46

- *Giới hạn:* Khi A trùng với Q giao điểm của PO với đường tròn (O) thì B trùng với O, tia phân giác góc POA suy biến thành điểm O.

Khi A trùng với S đối tâm với Q trong (O) thì B trùng với S, tia phân giác trùng với OO', O' là điểm đối tâm với O trong (I).

- ***Đảo:*** Lấy điểm B' bất kì ở trên đường tròn (I). Nối PB' cắt đường tròn (O) tại A'. Ta phải chứng minh rằng OB' là tia phân giác của góc POA'.

Thật vậy do hai đường tròn (I) và (O) đồng dạng nên ta suy ra $\frac{OP}{OA} = \frac{B'P}{B'A'} = 2$. Do đó OB' là tia phân giác của góc POA'.

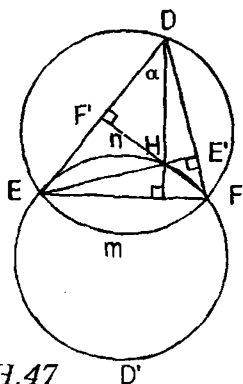
- *Kết luận:* Quỹ tích của B là đường tròn tâm I đồng dạng với đường tròn (O) đã cho, trừ hai điểm O và O' đối tâm của (I).

Bài 7. Một tam giác DEF có đáy EF cố định, góc D không đổi và bằng α. Tìm quỹ tích trực tâm H của tam giác.

Hướng dẫn. Vì đỉnh D nhìn EF cố định dưới một góc không đổi α nên D phải nằm trên cung chứa góc α dựng trên EF. Hãy tính góc EHF theo α để thấy H cũng nằm trên một cung chứa góc khác.

Điểm H lại phải nằm trên đường cao hạ từ D. Từ đó xác định được quỹ tích điểm H.

Ngoài ra cần xét thêm các trường hợp góc α là nhọn, tù hoặc vuông.



H.47

- *Thuận:* Vì đỉnh D nhìn EF cố định dưới một góc α nên quỹ tích của D là hai cung chứa góc *EDF* và *ED'F* đối xứng nhau qua EF (hình 47). Gọi E' và F' là chân hai đường cao hạ từ E và F ta có tứ giác DF'HE' nội tiếp, suy ra $\widehat{F'HE'} = 180° - α = \widehat{EHF}$.

Từ H nhìn EF dưới một góc không đổi là góc bù của α nên quỹ tích của H là hai cung chứa góc 180° - *α*, đó là hai cung EmF và EnF đối xứng nhau qua EF. Mặt khác H lại phải nằm trên đường cao hạ từ D.

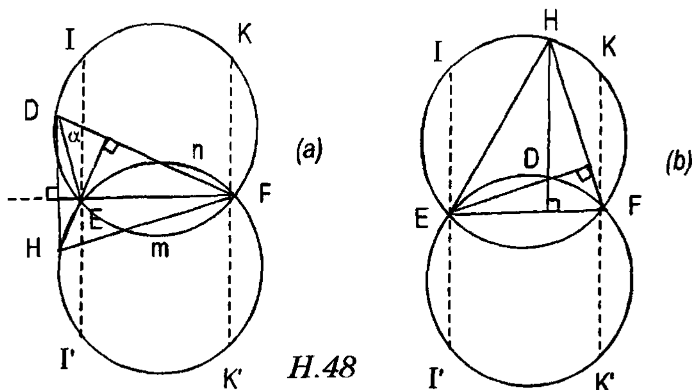
- *Giới hạn:* Nếu góc α nhọn mà $\hat{E}$ hoặc $\hat{F}$ là góc tù và điểm H nằm ngoài tam giác DEF thì EHF = 90° - DFH = α. Lúc này H chạy trên hai cung I'EFK' và IEFK (hình 48a), trong đó II' và KK' là những đường vuông góc với EF tại E và F.

Nếu góc α tù và các cung nhỏ EmF và EnF đều là quỹ

tích của đỉnh D, điểm H nằm giữa hai đường vuông góc II' và KK' thì H chạy trên hai cung IK và I'K' (hình 48b).

Nếu góc α vuông thì điểm H trùng với điểm D, lúc đó H chạy trên hai cung EmF và EnF.

- *Đảo:* Bạn đọc tự chứng minh.



H.48

- *Kết luận:* Quỹ tích trực tâm H là cung nhỏ EnF nếu α nhọn (E và F nhọn), là hai cung I'EFK' và IEFK nếu α nhọn mà E hoặc F tù, là hai cung IK và I'K' nếu α tù và là hai cung EmF và EnF nếu α vuông.

Bài 8. *Cho ba điểm A, B, C cố định trên đường thẳng d (B nằm giữa A và C) và hai nửa đường thẳng Ax, Cy cùng vuông góc với d về cùng một phía. Một góc vuông mBn quay xung quanh B có các cạnh cắt Ax, Cy theo thứ tự tại M và N. Tìm quỹ tích hình chiếu H của B trên đường thẳng MN.*

Hướng dẫn. Chứng minh các tứ giác AMHB và BHNC nội tiếp được (hình 49). Suy ra $\widehat{H_1} + \widehat{H_2} = \widehat{AHC} = 90^\circ$. Từ đó suy ra quỹ tích của H.

Cách giải:

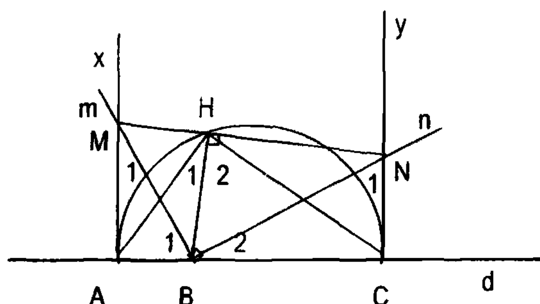
- *Thuận:* Nối HA, HC. Do $\widehat{MBN} = 90^\circ$ nên $\widehat{B_1} + \widehat{B_2} = 90^\circ$.

Mà các góc tại A và C đều vuông nên $\widehat{M_1} + \widehat{N_1} = 90^o$.

Tứ giác AMHB có hai góc đối A và H vuông nên nội tiếp được. Do đó $\widehat{H_1} = \widehat{M_1}$ (cùng chắn cung AB). Tương tự tứ giác BHNC cũng nội tiếp được nên $\widehat{H_1} = \widehat{N_1}$.

Suy ra $\widehat{AHC} = \widehat{H_1} + \widehat{H_1} = \widehat{M_1} + \widehat{N_1} = 90^o$.

Điểm H nhìn đoạn AC cố định dưới một góc vuông nên H nằm trên đường tròn đường kính AC.



H.49

- *Giới hạn:* Do H nằm trong nửa mặt phẳng chứa hai nửa đường thẳng Ax và Cy nên H chỉ chạy trên nửa đường tròn đường kính AC thuộc nửa mặt phẳng đó, trừ cả hai điểm A và C.

- ***Đảo:*** Lấy điểm H' trên nửa đường tròn đường kính AC ta có $\widehat{AH'C}$ vuông. Từ B kẻ tia Bm tạo với Ax góc M' bằng góc H'_1. Nối M'H' cắt Cy tại N', ta phải chứng minh rằng $\widehat{M'BN'} = 90^o$.

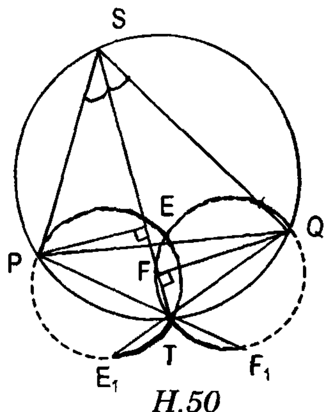
Thật vậy xét tam giác vuông M'AB ta có $\widehat{B_1} = 90^o - \widehat{M'_1}$. Tương tự ta có $\widehat{H'_2} = \widehat{N'_1}$ nên $\widehat{B_2} = 90^o - \widehat{N'_1}$, mà $\widehat{H'_1} + \widehat{H'_2} = 90^o$ suy ra $\widehat{B_1} + \widehat{B_2} = 90^o$. Do đó $\widehat{M'BN'} = 90^o$.

- *Kết luận:* Quỹ tích của điểm H là nửa đường tròn

đường kính AC, trừ hai điểm A và C.

Bài 9. *Cho đường tròn (O), P,Q là hai điểm cố định, S là điểm chuyển động trên (O). Tìm quỹ tích các hình chiếu E của P và F của Q trên tia phân giác của góc PSQ.*

Hướng dẫn. Gọi T là giao điểm của tia phân giác của góc PSQ với đường tròn (O), T là điểm cố định, do đó hai đoạn PT và QT là những đoạn cố định. Từ đó suy ra quỹ tích của E và của F.



H.50

Cách giải

- *Thuận:* Tia phân giác của góc PSQ cắt đường tròn (O) tại điểm T là trung điểm của cung nhỏ PQ. Do đó T là điểm cố định (hình 50).

Hình chiếu E của P trên tia phân giác luôn nhìn đoạn PT cố định dưới một góc vuông nên E nằm trên đường tròn đường kính PT. Tương tự hình chiếu F của Q nằm trên đường tròn đường kính TQ.

- *Giới hạn:* Khi S ở P thì E ở P. Khi S ở Q thì E ở E_1 là giao điểm của QT với đường tròn đường kính TP, do đó E chỉ chạy trên cung PTE_1.

Tương tự F chỉ chạy trên cung QT F_1 trong đó F_1 là giao điểm của TP với đường tròn đường kính TQ.

- *Đảo:* Lấy điểm E' bất kì trên cung PTE_1. Nối E'T, tia TE' cắt đường tròn (O) tại S', ta phải chứng minh S'T là tia phân giác của góc PS'Q. Thật vậy do E' nằm trên cung PTE_1 nên góc PE'T vuông tức là E' là hình chiếu của P trên S'T. Mặt khác T là trung điểm của cung nhỏ PQ nên S'T là tia

phân giác của góc PS'Q. Tương tự ta chứng minh với điểm F' bất kỳ trên cung QTF_1.

- *Kết luận:* Quỹ tích của F là cung QTF_1 của đường tròn đường kính TQ và quỹ tích của E là cung PTE_1 của đường tròn đường kính PT.

Bài 10. *Dựa vào quỹ tích cơ bản $MA^2 + MB^2 = k^2$, hãy tìm quỹ tích những điểm M sao cho:*

a) $MA^2 + MB^2 + MC^2 = k^2$

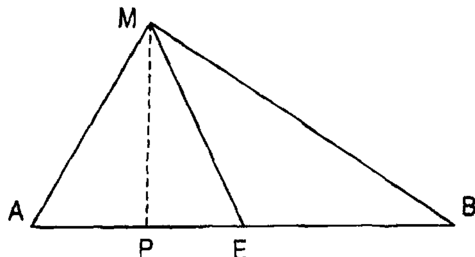
b) $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k^2$

trong đó A, B, C, D là những điểm cố định cho trước.

Hướng dẫn.

a) Gọi E là trung điểm của đoạn thẳng AB, ta có hệ thức $MA^2 + MB^2 = 2ME^2 + \frac{AB^2}{2}$ (*) trong đó ME là trung tuyến của tam giác MAB. Hệ thức $MA^2 + MB^2 + MC^2 = k^2$ trở thành $2ME^2 + MC^2 = k^2 - \frac{AB^2}{2}$. Từ đó suy ra quỹ tích của điểm M, bằng cách xét từng trường hợp đặc biệt khi điểm C trùng với trung điểm E của AB.

b) Gọi E và F theo thứ tự là trung điểm của AB và CD, rồi áp dụng hệ thức tương tự như (*) vào các tam giác MAB và MCD để tính được tổng $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$. Từ đó suy ra quỹ tích của M.



H.51

Cách giải

a) Xét tam giác MAB với ME là trung tuyến ta có hệ

thức (hình 51): $MA^2 + MB^2 = 2\,ME^2 + \frac{AB^2}{2}$.

Như vậy hệ thức đã cho trở thành:

$$2ME^2 + \frac{AB^2}{2} = k^2 - \frac{AB^2}{2} = k'^2 \quad (**)$$

Xét trường hợp đặc biệt khi C trùng với E. Trong tam giác MAC với MP là trung tuyến ta có:

$$MA^2 + MC^2 = 2MP^2 + \frac{AC^2}{2}.$$

Khi đó hệ thức đã cho $MA^2 + MB^2 + MC^2 = k^2$ trở thành:

$$2MP^2 + MB^2 = k^2 - \frac{AC^2}{2} = k''^2.$$

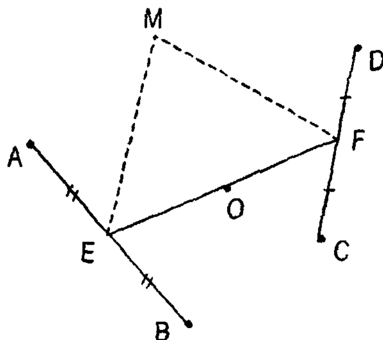
Quỹ tích những điểm M thoả mãn hệ thức cuối này là đường tròn tâm C với C là điểm trên PB sao cho 2CP = CB. Suy ra quỹ tích những điểm M thoả mãn (**) là đường tròn tâm G trên đoạn CE sao cho 2GE = GC (G là trọng tâm của ΔABC) (hình 52).

Thật vậy, gọi M' là hình chiếu của M trên CE, trong tam giác MGE ta có: $ME^2 = MG^2 + EG^2 + 2.EG.GM'$. Trong tam giác MGC lại có: $MC^2 = MG^2 + GC^2 - 2GC.\,GM'$ (nếu góc MGE nhọn thì góc MGC tù trong biểu thức của ME^2 ta có $-\,2GE.GM'$, còn trong biểu thức của MC^2 thì ta lại có $+\,2GE.GM'$).

H.52

Do 2GE = GC nên: $2ME^2 + MC^2 = 3MG^2 + 2EG^2 + GC^2$ tức là hệ thức (**) tương đương với $3MG^2 = k^2.\frac{AB^2}{2} - 2EG^2 - GC^2$.

Vậy quỹ tích của điểm M là đường tròn tâm G bán kính tính được theo hệ thức cuối này.



H.53

b) Gọi E,F theo thứ tự là trung điểm các đoạn thẳng AB và CD (hình 53) ta có:

$$MA^2 + MB^2 = 2ME^2 + \frac{AB^2}{2}$$

$$MC^2 + MD^2 = 2MF^2 + \frac{CD^2}{2}.$$

Cộng từng vế hai đẳng thức này được:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2(ME^2 + MF^2) + \frac{AB^2 + CD^2}{2}.$$

Do đó hệ thức đã cho $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k^2$ tương đương với $ME^2 + MF^2 = \frac{2k^2 - AB^2 - CD^2}{4}$.

Vậy quỹ tích của điểm M là đường tròn mà tâm là trung điểm O của EF.

5 BÀI TOÁN TỰ GIẢI

ĐỀ BÀI

Bài 1. *Một điểm P chạy trên đoạn thẳng MN cố định. Dựng về cùng một phía của MN hai tam giác vuông cân MQP và PSN. Tìm quỹ tích của các điểm Q, S và trung điểm T của QS.*

Bài 2. *Nối một điểm A bất kì trên một cung tròn với hai đầu B và C của nó. Tìm quỹ tích.*

a) Tâm I của đường tròn nội tiếp trong tam giác ABC.

b) Tâm K của đường tròn bàng tiếp trong góc A.

Bài 3. *Cho tam giác ABC vuông tại A. Về phía ngoài của tam giác dựng hai nửa đường tròn đường kính AB và AC. Một cát tuyến di động qua A cắt nửa đường tròn đường kính AB tại P và nửa đường tròn đường kính AC tại Q. Tìm quỹ tích trung điểm S của PQ.*

Bài 4. *Một đường thẳng di động m đi qua đỉnh M của một tam giác MNP cân tại M. Trên m lấy một điểm S sao cho tổng SN + SP là nhỏ nhất. Tìm quỹ tích của S.*

Bài 5. *Cho tam giác vuông cân ABC (AB = AC) và I là trung điểm của BC. Một điểm K chuyển động trên đoạn IA. Đường thẳng qua A vuông góc với BK cắt BK tại M và BC tại N.*

a) Tìm quỹ tích của M.

b) Gọi P là điểm đối xứng của I qua AN, tìm quỹ tích của P.

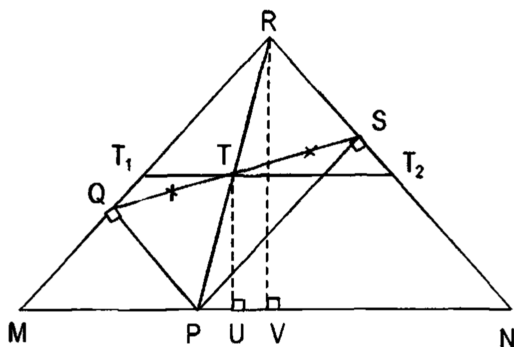
HƯỚNG DẪN CÁCH GIẢI

Bài 1. Hướng dẫn. Các tam giác vuông cân đều có góc ở đáy bằng 45° nên giao điểm R của hai đường thẳng MQ và NS là cố định. Từ đó tìm được quỹ tích của Q và S (hình 54).

Để tìm quỹ tích của T lưu ý tứ giác PQRS là hình chữ nhật mà T là giao điểm của hai đường chéo. Từ đó chứng minh khoảng cách từ T đến MN không đổi. Suy ra quỹ tích của T.

- *Thuận:* Các tam giác MQP và PSN vuông cân nên các góc ở đáy đều bằng 45°. Suy ra tam giác MRN cũng vuông cân và R là điểm cố định. Vậy Q và S lần lượt chạy trên các cạnh MR và NR của tam giác vuông cân MRN.

Tứ giác PQRS là hình chữ nhật và trung điểm T của QS là giao điểm hai đường chéo bằng nhau. Suy ra TP = TR. Hạ TU và RV cùng vuông góc với MN. Ta có TU // RV, trong tam giác PRV đoạn TU là đường trung bình nên TU = $\frac{1}{2}$RV = không đổi, vậy T cách MN một đoạn không đổi bằng $\frac{1}{4}$MN nên T chạy trên đường thẳng song song với MN đi qua trung điểm của đường cao RV của tam giác MRN.



H.54

Giới hạn: Do P chỉ chạy trên đoạn thẳng MN nên Q và S chỉ chạy trên cạnh MR và NR, còn T chỉ chạy trên đường trung bình T_1T_2 của tam giác vuông cân MRN.

Đảo: Bạn đọc tự chứng minh.

Kết luận: Quỹ tích các điểm Q, S và T theo thứ tự là cạnh MR, NR và đường trung bình T_1T_2 của tam giác vuông cân MRN.

Bài 2. Hướng dẫn.

a) Dù A ở vị trí nào trên cung lớn BC thì góc A vẫn không đổi. Muốn tìm tâm đường tròn nội tiếp trong tam giác ABC chỉ cần vẽ hai phân giác của các góc B và C để được tâm I. Từ đó tính được $\widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$ không đổi. Suy ra quỹ tích của I.

b) Do tính đối xứng ta chỉ cần vẽ hai phân giác ngoài của B và C rồi tính góc $\widehat{BKC} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}$ không đổi. Suy ra quỹ tích của K.

a) *Thuận:* Gọi I là giao điểm hai phân giác trong của các góc B và C ta có: $\widehat{BIC} = 180^\circ - \frac{\widehat{B} + \widetilde{C}}{2} = 180^\circ = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$ hay

$\widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$ (hình 55).

Vậy I nằm trên cung chứa góc $90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$ dựng trên BC.

- *Giới hạn:* Nếu A trùng với B hoặc với C thì tam giác ABC suy biến thành đoạn thẳng BC.

- *Đảo:* Lấy I' là điểm bất kì trên cung BC ta $\widehat{BI'C} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$. Do đó $\widehat{I'BC} + \widehat{I'CB} < 90^\circ$. Nếu ta gấp đôi các góc này thì các đường thẳng BA' và CA' cắt nhau phía trên BC vì $\widehat{CBA'} + \widehat{BCA'} < 180^\circ$, ta có $\widehat{BI'C} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$, vậy $\widehat{A'} = \widehat{A}$ và điểm A' sẽ ở trên cung tròn đã cho.

H.55

Lưu ý là tâm của cung chứa góc chính là trung điểm S của cung nhỏ BC.

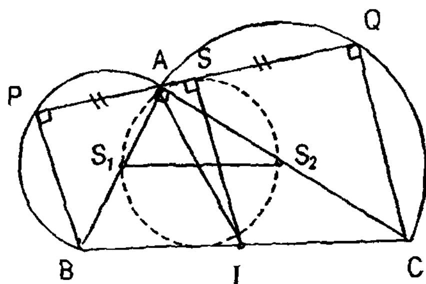
b) - *Thuận:* Do tính đối xứng ta kẻ hai phân giác ngoài của B và C cắt nhau tại K. Ta tính được dễ dàng $\widehat{BKC} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}$ (đơn giản nhất là lưu ý rằng tứ giác IBKC nội tiếp được do có tổng hai góc đối bằng 180°), vậy K nằm trên cùng đường tròn của I.

- *Giới hạn:* Tâm K chỉ chạy trên cung MmN trong đó M và N theo thứ tự là giao điểm của cung tâm S với hai đường vuông góc với BC kẻ từ B và C.

- *Đảo:* Bạn đọc tự chứng minh.

- *Kết luận chung:* Quỹ tích tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác ABC là cung chứa góc $90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$ *dựng trên BC có tâm* S là trung điểm của cung nhỏ BC, trừ hai điểm B và C.

Quỹ tích tâm K của đường tròn bàng tiếp trong góc A là cung MmN nằm trên đường tròn tâm S.



H.56

Bài 3. Hướng dẫn. Từ trung điểm I của cạnh huyền BC kẻ IS // PB ta có IS là đường trung bình của hình thang BPQC. Chứng minh góc ASI vuông. Từ đó suy ra quỹ tích của S (hình 56).

- *Thuận:* Qua trung điểm I của cạnh huyền BC kẻ IS // BP ta được đường trung bình IS của hình thang vuông BPQC (vì các góc P và Q là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Suy ra IS ⊥ PQ, tức là ASI = 90°.

Điểm S nhìn đoạn AI cố định dưới một góc vuông nên S

chạy trên đường tròn đường kính AI.

- *Giới hạn:* Khi cát tuyến di động đến vị trí AB thì S trùng với S_1 trên AB còn khi cát tuyến đến vị trí AC thì S trùng với S_2 trên AC.

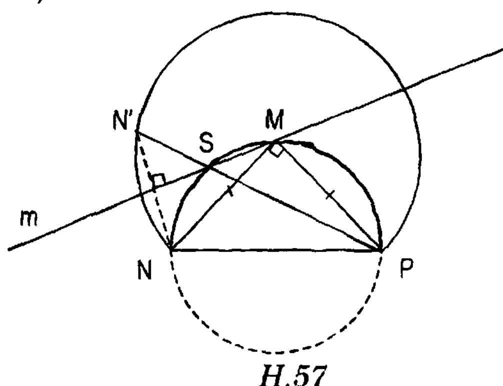
Ta có $AI = S_1S_2$ vì $AI = \frac{1}{2}BC$ và $S_1S_2 = \frac{1}{2}BC$.

- *Đảo:* Bạn đọc tự chứng minh.

- *Kết luận:* Quỹ tích của S là nửa đường tròn đường kính S_1S_2 (với $S_1S_2 = AI$) là đường trung bình của tam giác vuông ABC.

Bài 4. *Hướng dẫn.* Xét hai trường hợp tuỳ theo đường thẳng m cắt đoạn NP hoặc không cắt đoạn NP. Nếu m cắt đoạn NP thì giao điểm thoả mãn điều kiện đã cho. Nếu m không cắt đoạn NP thì ta lấy điểm N' đối xứng N qua m để chứng tỏ tổng SN + SP sẽ nhỏ nhất khi ba điểm P, S, N' thẳng hàng và S là giao điểm của PN' với m. Suy ra quỹ tích của N'. Sau đó chứng minh góc NSP không đổi và suy ra quỹ tích của S (hình 57).

- *Thuận:* Trường hợp m cắt đoạn NP thì giao điểm chính là điểm S thoả mãn SN + SP nhỏ nhất. Vậy S chạy trên đoạn NP.



H.57

Bây giờ ta xét trường hợp m không cắt đoạn NP. Gọi N' là điểm đối xứng với N qua đường thẳng m. Khi đó [SN + SP = SN' + SP], suy ra tổng SN + SP nhỏ nhất khi ba điểm P,S,N' thẳng hàng và S là giao điểm của PN' với m.

Do MN = MN' nên khi m thay đổi thì N' chạy trên đường tròn tâm M bán kính MN.

Xét tam giác SNN' cân tại S ta có:

$\widehat{NSP} = 2\widehat{NN'P} = \widehat{NMP}$ không đổi. Vậy S chạy trên đường tròn ngoại tiếp tam giác NMP.

- *Giới hạn:* Vì m không cắt đoạn NP nên N' chỉ chạy trên cung lớn NP của đường tròn (M). Còn S chỉ chạy trên cung lớn NMP của đường tròn ngoại tiếp tam giác NMP.

- *Đảo:* Lấy điểm S' bất kỳ trên cung lớn NMP ta chứng minh rằng tổng S'N + S'P là nhỏ nhất. Thật vậy lấy N' là điểm đối xứng của N qua m ta có P, S', N' thẳng hàng và S'N + S'P = S'N' + S'P = PN' nhỏ nhất vì với mọi điểm S_1 khác của m thì tổng $S_1P + S_1N = S_1P + S_1N' > PN'$.

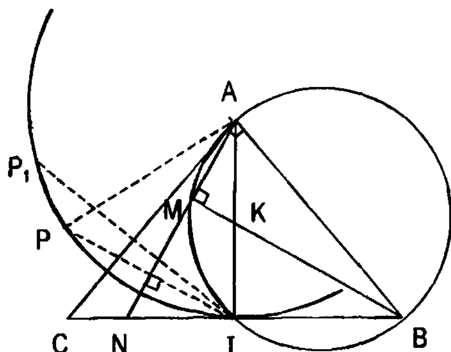
- *Kết luận:* Quỹ tích của S là đoạn NP nếu m cắt đoạn NP và là cung lớn NMP nếu m không cắt đoạn NP.

Bài 5. Hướng dẫn.

a) M nhìn đoạn AB dưới một góc vuông từ đó suy ra quỹ tích của M (hình 58).

b) Do P và I đối xứng qua AN nên AP = AI, mà AI cố định từ đó suy ra quỹ tích của P.

- *Thuận:* a) Do góc AMB vuông (gt) nên M nhìn AB dưới một góc vuông, do đó M chạy trên đường tròn đường kính AB.



H.58

b) Ta có AP = AI vì P và I đối xứng qua AN. Mà AI cố định nên quỹ tích của P là đường tròn tâm A bán kính AI.

- *Giới hạn:*

a) Khi K trùng với I thì M cũng trùng với I. Khi K trùng với A thì M cũng trùng với A. Vậy M chỉ chạy trên cung nhỏ AI (vẽ nét đậm).

b) Khi N trùng với I thì P cũng trùng với I. Khi N trùng với C thì P sẽ ở P_1 đối xứng với I qua AC. Vậy P chỉ chạy trên cung nhỏ P_1 (vẽ nét đậm).

- *Đảo:* Bạn đọc tự chứng minh.

- *Kết luận:* Quỹ tích của M là cung nhỏ AI thuộc đường tròn đường kính AB và quỹ tích của P là cung nhỏ IP_1 thuộc đường tròn (A).

II. QUAN HỆ GIỮA TOÁN QUỸ TÍCH VÀ TOÁN DỰNG HÌNH

Ở chương II ta đã xét một số bài toán về mối quan hệ khăng khít giữa toán dựng hình và toán quỹ tích. Bây giờ ta xét thêm một số bài toán minh hoạ khác mà "quỹ tích đường tròn" luôn được vận dụng.

10 BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài 1. *Dựng tam giác biết cạnh a, góc đối diện A và bán kính r của đường tròn nội tiếp.*

Bài 2. *Dựng tam giác ABC biết* $\widehat{B} = \alpha$*, đường cao và trung tuyến xuất phát từ B đến cạnh đối AC.*

Bài 3. *Dựng tam giác DEF biết* $\widehat{D} = \beta$*, cạnh EF = d và tỉ số* $\frac{DE}{DF} = \frac{p}{q}$.

Bài 4. *Từ một điểm P ở ngoài đường tròn (O) dựng một cát tuyến PAB sao cho tổng các khoảng cách từ các giao điểm A và B tới đường thẳng OP bằng một độ dài m cho trước.*

Bài 5. *Cho đường tròn (O) đường kính AB và tiếp tuyến Ax. Tìm trên (O) một điểm M sao cho tổng các khoảng cách đến hai đường thẳng AB và Ax bằng một độ dài s cho trước.*

Bài 6. *Dựng một tam giác biết hai góc α, β và một trung tuyến m.*

Bài 7. *Dựng một tam giác biết một cạnh a, phân giác p và tổng hai cạnh $b + c = k$.*

Bài 8. *Dựng tam giác MNP biết cạnh MN = p, $\widehat{P} = \alpha$ và tích $PM.\ PN = k^2$.*

Bài 9. *Cho góc xSy và đường thẳng d bất kì đi qua điểm C trên cạnh Sx. Trên cạnh Sy lấy một điểm D. Tìm trên Sx một điểm P và trên Sy một điểm Q sao cho CP = DQ và đường thẳng d đi qua trung điểm của PQ.*

Bài 10. *Cho đường tròn (O), một điểm M bất kì nằm trên và một điểm S nằm trong đường tròn đó. Tìm trên (O) hai điểm N và P sao cho:*

a) S là trọng tâm của tam giác MNP;

b) S là trực tâm của tam giác MNP.

SƠ LƯỢC CÁCH GIẢI

Bài 1. Giả sử ABC là tam giác phải dựng (hình 59) và I là giao điểm hai phân giác trong của góc B và C, ta có:

$$\widehat{BIC} = 90 + \frac{\widehat{A}}{2}.$$

Như vậy trong tam giác BIC ta biết cạnh đáy BC, góc đối diện I và đường cao r. Do đó có cách dựng sau:

Dựng đoạn BC = a, rồi dựng cung chứa góc $90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$ và

đường thẳng song song với BC cách nó một khoảng r. Đường thẳng này cắt cung chứa góc tại I. Biết I thì dựng được ngay tam giác ABC.

Gọi OE là bán kính vuông góc với dây BC. Ta phải có điều kiện $r \leq DE$ và khi đó bài toán sẽ có 2 nghiệm hình hoặc 1 nghiệm hình.

H.59

Bài 2. Giả sử ABC là tam giác đã dựng được (hình 60). Ta thấy rằng có thể dựng được ngay tam giác vuông BHM vì biết cạnh góc vuông h và cạnh huyền m. Do đó chỉ cần xác định thêm hai điểm A và C.

- A phải nằm trên đường thẳng HM và nếu kéo dài BM thêm đoạn MN = BM thì tứ giác ABCN là hình bình hành và $\widehat{BAN} = 180^\circ - \alpha$. Vậy A còn phải nằm trên cung chứa góc $180^\circ - \alpha$ dựng trên BN.

- Để xác định C chỉ cần kéo dài HM sao cho MC = AM.

H.60

Bài toán sẽ có 1 nghiệm nếu $m > h$, vô nghiệm nếu $m < h$. Đặc biệt nếu $m = h$ thì ABC sẽ là tam giác cân.

Bài 3. Sau khi dựng đoạn EF = d thì đỉnh D phải là giao điểm của hai quỹ tích (hình 61):

- Quỹ tích những điểm nhìn EF dưới góc β, tức nằm trên cung EmF chứa góc β.

- Quỹ tích những điểm mà tỉ số khoảng cách đến E và F bằng $\frac{p}{q}$, tức là nằm trên đường tròn đường kính IK, I và K là hai điểm mà $\frac{IE}{IF} = \frac{KE}{KF} = \frac{p}{q}$ (trên hình vẽ ta giả sử $\frac{p}{q} > 1$).

H.61

Bài toán luôn có một nghiệm hình.

Bài 4. Ta phải có AA' + BB' = m (hình 62). Nếu từ trung điểm M của AB ta kẻ đường vuông góc với OP ta có:

$$MM' = \frac{AA' + BB'}{2} = \frac{m}{2}.$$

Do đó M sẽ ở trên đường thẳng d song song với OP và cách nó một khoảng $\frac{m}{2}$. Đồng thời M lại phải thuộc quỹ tích trung điểm những dây xuất phát từ P, tức là ở trên cung nhỏ OS của đường tròn đường kính OP. Từ đó suy ra ngay cách dựng cát tuyến PAB.

H.62

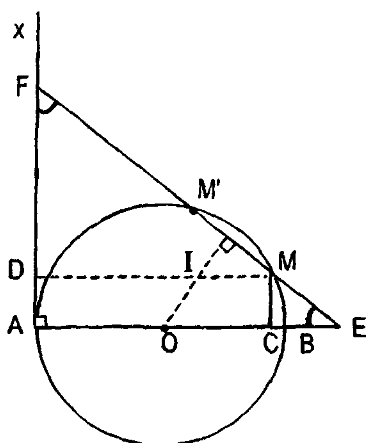
Kẻ bán kính IK ⊥ OP.

- Nếu K ở ngoài đường tròn (O) và nếu $\frac{m}{2}$ < IK thì d cắt đường tròn (I) tại hai điểm M và M_1 đối xứng nhau qua IK (loại điểm M_1) và M thỏa mãn khi $\frac{m}{2} \leq SS'$.

Giá trị lớn nhất của m là 2SS', ứng với trường hợp PAB trở thành tiếp tuyến.

- Nếu K ở ngoài đường tròn (O) thì phải có $\frac{m}{2} \leq IK$ (bạn đọc tự vẽ hình). Giá trị lớn nhất của m là bằng: 2IK = OP, ứng với vị trí PK của cát tuyến.

Bài 5. Giả sử M là điểm đã dựng được, ta phải có MC + MD = s (hình 63).



H.63

Kéo dài AB một đoạn CE = CM ta được AE = s. Tam giác MCE là vuông cân nên $\widehat{E} = 45°$.

Ta có ngay một nghiệm hình đầu tiên:

Trên AB kéo dài lấy điểm E sao cho AE = s và góc $\widehat{AEM} = 45°$.

Để khỏi phải dựng góc khiến cho việc biện luận phức tạp, ta lưu ý rằng nếu kéo dài EM cho gặp Ax tại F thì sẽ được tam giác AEF cân. Thành thử chỉ cần đặt đoạn AE = AF = s, rồi nối EF cắt đường tròn tại điểm M phải tìm.

Muốn EF cắt đường tròn (O) thì khoảng cách OI ≤ R.

Xét hai tam giác vuông đồng dạng EOI và EFA ta có:

$\frac{OI}{AF} = \frac{EO}{EF}$ hay $\frac{OI}{s} = \frac{s-R}{s\sqrt{2}}$, vậy $OI = \frac{s-R}{\sqrt{2}}$.

Do đó điều kiện trở thành $\frac{s-R}{\sqrt{2}} \leq R$ hay $s \leq R + R\sqrt{2}$.

Ngoài ra EF lại phải cắt (O) giữa E và F. Vậy:

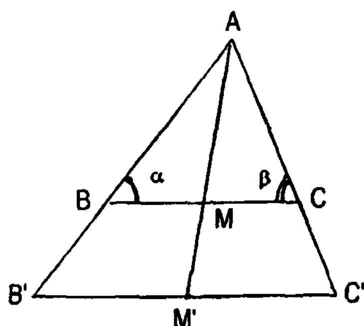
- Nếu $s > 2R$, bài toán có 2 nghiệm hình.
- Nếu $s < 2R$, có 1 nghiệm hình.

Bài 6. Bỏ qua trung tuyến m thì bài toán sẽ không xác định.

Ta hãy đặt một đoạn BC bất kì và tại B,C dựng các góc α, β (hình 64)

Ta được tam giác ABC đồng dạng với tam giác phải dựng.

Trên trung tuyến AM của tam giác này đặt đoạn AM' = m rồi kẻ qua M' đường thẳng song song với BC. Ta được tam giác AB'C' thoả mãn bài ra.



H.64

Ta luôn dựng được tam giác với điều kiện $\alpha + \beta < 180^\circ$

Có thể kiểm nghiệm lại là M' đúng là trung điểm của B'C' vì $\frac{M'B'}{M'C'} = \frac{MB}{MC} = 1$.

Lưu ý quan trọng: Ta có thể vận dụng bài toán này để giải các bài toán mà cùng với các góc cho trước, bài ra cho một trong các điều kiện sau:

a) một đường cao;

b) một phân giác;

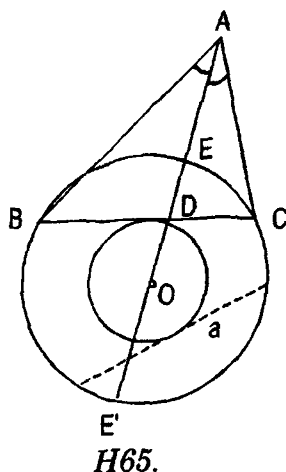
c) bán kính đường tròn ngoại tiếp;

d) bán kính đường tròn nội tiếp hoặc bàng tiếp;

e) tổng hoặc hiệu hai cạnh;

g) chu vi.

Bài 7. Theo tính chất đường phân giác AD (hình 65) ta có:
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \text{ hay } \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC} = \frac{AB + AC}{BD + DC} = \frac{k}{a}$$

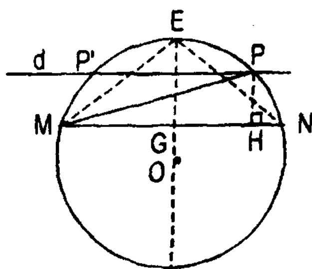


H65.

Nếu trước tiên đặt phân giác AD thì các điểm B và C ở trên cùng một đường tròn là quỹ tích những điểm mà tỉ số khoảng cách đến hai điểm cố định A và D có giá trị $\frac{k}{a}$. Quỹ tích này là đường tròn đường kính EE' trong đó E và E' là các điểm mà $\frac{EA}{ED} = \frac{E'A}{E'D} = \frac{k}{a}$.

Bài toán quy về dựng qua điểm D một dây BC dài a. Ngoài ra D lại phải ở giữa B và C, tức là ở trong đường tròn, điều này đòi hỏi $\frac{k}{a} > 1$.

Bài 8. Trước hết dựng đoạn MN = p, rồi dựng cung chứa góc α trên MN (hình 66).



H.66

Dựa theo hệ thức bc = $2Rh_a$, tức là tích hai cạnh của một tam giác bằng tích của đường kính đường tròn ngoại tiếp với đường cao ứng với cạnh thứ ba, ta có: PM = 2R. PH.

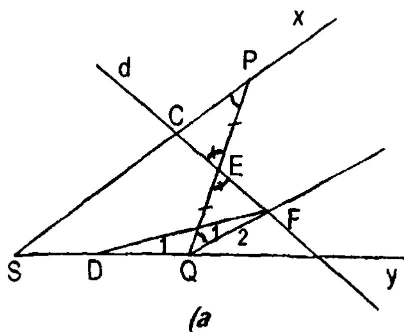
Suy ra $PH = \frac{k^2}{2R}$.

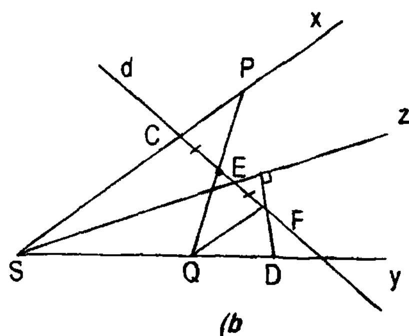
Vậy quỹ tích của P là đường thẳng d song song với MN cách nó một khoảng không đổi bằng $\frac{k^2}{2R}$. Giao điểm của d với cung chứa góc α cho điểm P cần dựng.

Kẻ EF ⊥ MN. Muốn cho d cắt cung MEN thì phải có $PH \leq GE$ hay $\frac{k^2}{2R} \leq GE$, tức là $k^2 \leq 2R.GE$.

Nhưng $EN^2 = EF.GE = 2R.GE$ nên điều kiện trở thành $k^2 \leq EN^2$.

Ta thấy rằng trên cung MEN thì trung điểm E có tích EN. EM là lớn nhất.





H.67

Bài 9. Xét 2 trường hợp tuỳ theo điểm D ở giữa đoạn SQ hoặc ở ngoài đoạn SQ.

a) D ở giữa đoạn SQ (hình 67a). Giả sử P và Q là hai điểm tìm được, ta có EP = EQ và CP = DQ.

Từ Q kẻ đường thẳng song song với Sx cắt d tại F. Xét hai tam giác bằng nhau ΔCEP = ΔFEQ (g.c.g) ta có:

CE = EF, CP = QF, suy ra QE = DQ.

Do đó tam giác QDF cân tại Q, nên

$\widehat{D_1} = \widehat{F_1} \frac{1}{2}\widehat{Q_2} = \frac{1}{2}\widehat{xSy}.$

Suy ra DF song song với tia phân giác góc xSy.

Ta có cách dựng sau:

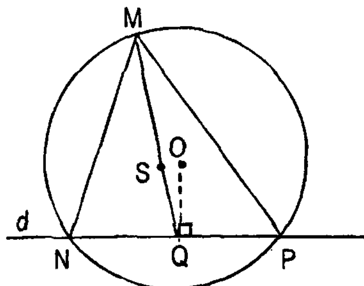
Dựng DF song song với tia phân giác góc xSy cắt d ở F. Từ F kẻ đường song song với Sx cắt Sy tại Q. Từ Q kẻ đường thẳng đi qua trung điểm E của CF cắt Sx tại P phải tìm.

b) D nằm ngoài đoạn SQ (hình 67b). Trên d lấy đoạn CE = EF. Xét hai tam giác bằng nhau ΔCEP = ΔFEQ (c.g.c). Suy ra CP = QF và CP // QF. Do đó tam giác QDF cân tại Q. Ta có DF vuông góc với phân giác Sz của góc xSy.

Suy ra cách dựng như sau:

Từ D kẻ DF ⊥ Sz cắt d ở F. Từ F kẻ đường song song với Sx cắt Sy ở Q. Nối Q với *trung điểm E của CF cắt Sx tại P* phải tìm.

Bài 10. a) Giả sử N và P là hai điểm nằm trên đường tròn (O) thoả mãn điều kiện S là trọng tâm của tam giác MNP (hình 68).



H.68

Trung tuyến MQ qua S nên SM = 2SQ. Lại có OQ ⊥ NP. Suy ra cách dựng sau:

- Kéo dài MS một đoạn SQ = $\frac{1}{2}$ MS;

- Vẽ đường thẳng d ⊥ OQ tại Q;

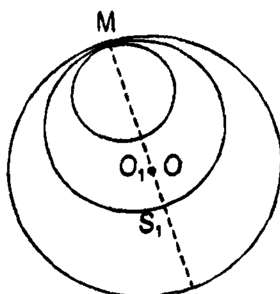
- Giao điểm của d với (O) cho ta hai điểm N và P phải tìm.

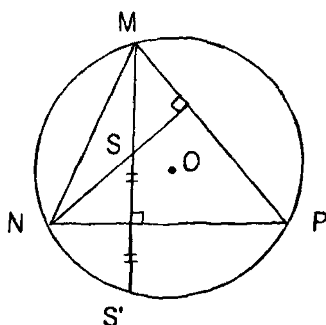
Hai điểm N và P chỉ xác định được khi Q được xác định, do đó phải tuỳ thuộc vào vị trí của S ở trong (O). Bài toán có nghiệm hình khi S nằm trong đường tròn đường kính MS_1 = $\frac{2}{3}$ đường kính của (O), đồng thời không được nằm trên đường

tròn đường kính $MO_1 = \frac{2}{3}$ bán kính của (O) (hình 69a, bạn đọc tự nghiên cứu).

Nếu Q trùng với O thì đoạn OQ suy biến thành điểm O. Khi đó đường thẳng d qua O và tam giác MNP sẽ là tam giác vuông đỉnh N. Bài toán có vô số nghiệm hình.

b) Giả sử N và P đã xác định được trên (O) và S là trực tâm của tam giác MNP (hình 69b).





(a) *H.69* (b)

Dựa vào tính chất: "Trong một tam giác điểm đối xứng của trực tâm H qua mỗi cạnh đều nằm trên đường tròn ngoại tiếp của tam giác đó", ta thấy ngay là điểm S' đối xứng của S qua cạnh NP nằm trên đường tròn (O) đã cho.

Ta có ngay cách dựng sau:

Nối MS và kéo dài cắt đường tròn (O) tại S'. Dựng đường trung trực của SS' cắt (O) tại hai điểm N và P phải tìm.

Bài toán luôn có 1 nghiệm hình.

Bạn có biết...

A. Quỹ tích $pMA^2 + qMB^2 = k^2$

Từ M ta kẻ MD ⊥ AB (A,B là hai điểm cố định, p, q là hai số dương). Nối M với một điểm C tuỳ ý trên AB (hình 70). Theo hai định lí quen thuộc ta có:

$MA^2 = MC^2 + AC^2 + 2AC.CD$ (1)

$MB^2 = MC^2 + CB^2 - 2CB.CD$ (2)

Nhân hai vế của (1) với p và của (2) với q rồi cộng từng vế được:

$p.MA^2 + q.MB^2 =$

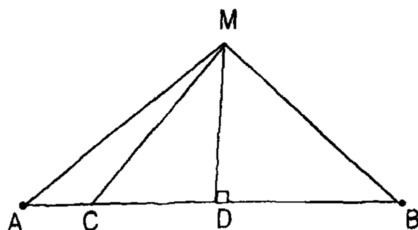
$= MC^2(p + q) + p.AC^2 + q.CB^2 + 2CD(p.AC - q.CB)$ (*).

Ta xác định điểm C bằng hệ thức $p.AC - q.CB = 0$ hay $\frac{CA}{CB} = \frac{q}{p}$, suy ra $CA = \frac{aq}{p+q}, CB = \frac{ap}{p+q}$, trong đó a = AB và

$$p.AC^2 + q.CB^2 = \frac{a^2q^2p + a^2p^2q}{(p+q)^2} = \frac{a^2pq}{p+q}.$$

Hệ thức (*) bây giờ trở thành:

$$k^2 = MC^2(p+q) + \frac{a^2pq}{p+q}.$$



H.70

Điều này chứng tỏ MC là không đổi. Vậy quỹ tích của M là đường tròn tâm C bán kính MC dựng được theo hệ thức cuối này.

Quỹ tích sẽ không tồn

tại nếu $k^2 > \frac{a^2pq}{p+q}$ và suy biến thành một điểm C khi $k^2 = \frac{a^2pq}{p+q}$.

Khi p = q ta tìm được một kết quả quen thuộc.

Lưu ý

1) *Nếu là quỹ tích $pMA^2 - qMA^2 = k^2$ thì sao?*

Ta sẽ lấy một điểm C tuỳ ý trên AB kéo dài. Ta xác định C bằng cách làm triệt tiêu (như ở phần trên) hệ số của CD và ta sẽ còn tìm được một đường tròn.

Khi p tiến đến q thì bán kính đường tròn này tăng vô hạn và quỹ tích có giới hạn là đường thẳng vuông góc với AB (quỹ tích quen thuộc).

2) *Quỹ tích $p.MA^2 + q.MB^2 = k^2$ là quỹ tích mở rộng của ba quỹ tích cơ bản:*

a) $MA^2 + MB^2 = k^2 (p = q = 1)$

b) $MA^2 - MB^2 = k^2 (p = 1, q = -1)$

c) $\frac{MA}{MB} = k (p = 1, q = -k^2, k = 0)$.

3) *Quỹ tích tổng quát.*

$MA_1^2 + MA_2^2 + MA_3^2 + ... + MA_n^2 = k^2$ trong đó $A_1, A_2, A_3, ...A_n$ là n điểm cố định trước, cũng là một đường tròn.

B. Quỹ tích là trục đẳng phương, tâm đẳng phương

1) *Phương tích*

Phương tích của một điểm M đối với một đường tròn (O,r) là một số bằng $MO^2 - r^2$.

Kí hiệu $P_{M/(O)} = MO^2 - r^2$.

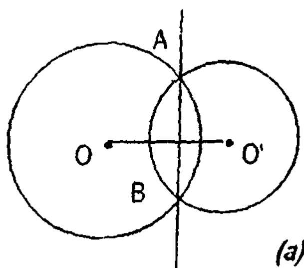
Rõ ràng:

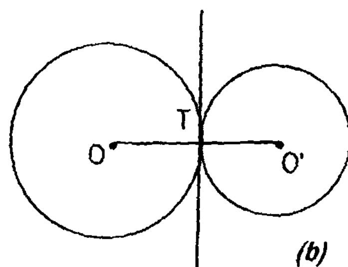
- Nếu $P_{M/(O)} > 0$ thì MO > r và M nằm ngoài đường tròn (O)

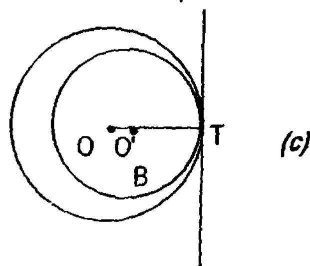
- Nếu $P_{M/(O)} < 0$ thì $MO < r$ và M nằm trong đường tròn

- Nếu $P_{M/(O)} = 0$ thì $MO = r$ và M nằm trên đường tròn.

2) Trục đẳng phương







H.71

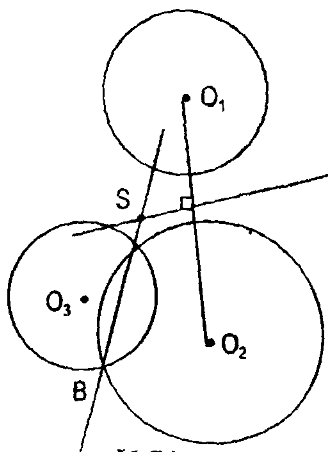
Quỹ tích những điểm có cùng phương tích đối với hai đường tròn (O) và (O') là một đường thẳng gọi là trục đẳng phương của hai đường tròn.

- Trục đẳng phương của (O) và (O') vuông góc với OO'.

- Nếu (O) và (O') cắt nhau tại A và B thì đường thẳng AB là trục đẳng phương của hai đường tròn (hình 71a).

- Nếu (O) và (O') tiếp xúc nhau tại T thì tiếp tuyến chung tại T là trục đẳng phương của hai đường tròn (hình 71 b,c).

Nếu có ba đường tròn O_1, O_2 và O_3 thì điểm S có cùng phương tích với ba đường tròn gọi là *tâm đẳng phương* của ba đường tròn này (hình 72).



H.72

3. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hai đường tròn (O,r) và (O',r').

a) Tìm quỹ tích những điểm M có tổng các phương tích đối với hai đường tròn là một hằng số.

b) Nếu là hiệu các phương tích bằng một hằng số thì sao?

Cách giải

a) Ta có $P_{M/(O)} + P_{M/(O)'} = k^2$, tức là $MO^2 - r^2 + MO'^2 - r'^2 = k^2$ hay $MO^2 + MO'^2 = k^2 + r^2 + r'^2$.

Xét tam giác OMO' ta có $2IM^2 + \frac{OO'^2}{2} = k^2 + r^2 + r'^2$ (I là trung điểm của OO') suy ra

$$2IM^2 = \frac{2(k^2 + r^2 + r'^2) - OO'^2}{2} \text{ hay } IM^2 = \frac{2(k^2 + r^2 + r'^2) - OO'^2}{4}.$$

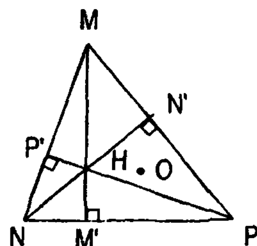
Vậy quỹ tích của M là đường tròn tâm I bán kính IM.

b) Ta có $P_{M/(O)} - P_{M/(O')} = k^2$, tức là $MO^2 - r^2 - (MO' - r'^2) = k^2$ hay $MO^2 - MO'^2 = k^2 + r^2 - r'^2$.

Gọi I là trung điểm của OO', quỹ tích của M sẽ là đường thẳng vuông góc với OO' tại điểm K cách I một đoạn

$$IK = \left|\frac{k^2 + r^2 - r'^2}{2OO'}\right|.$$

Ví dụ 2. Cho tam giác MNP có ba đường cao MM', NN', PP' và H là trực tâm. Tìm điểm S có cùng phương tích với ba đường tròn có đường kính là các cạnh của tam giác MNP (S chính là tâm đẳng phương của ba đường tròn nói trên).



H.73

Cách giải

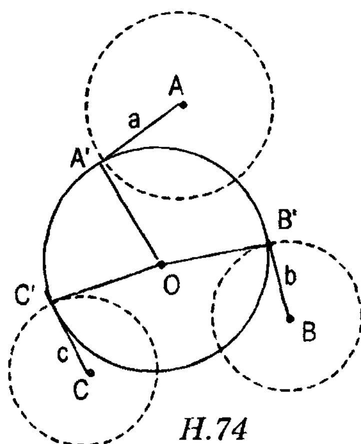
Đường tròn đường kính NP đi qua P', N' và đường tròn

đường kính MN đi qua N', M'. Suy ra NN' là trục đẳng phương của hai đường tròn này (hình 73).

Tương tự MM' là trục đẳng phương của hai đường tròn đường kính MN và MP.

Hai trục đẳng phương này đồng quy tại H, trực tâm của tam giác MNP. Vậy trực tâm H là tâm đẳng phương của ba đường tròn có đường kính là các cạnh của tam giác MNP.

Ví dụ 3. Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Dựng đường tròn tâm O sao cho các tiếp tuyến với (O) kẻ từ ba điểm trên có độ dài theo thứ tự bằng a, b, c.



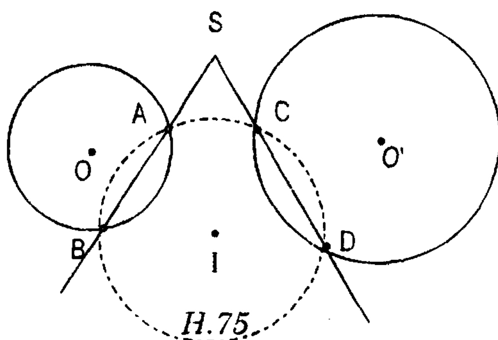
H.74

Cách giải

Nếu từ A, B, C ta vẽ các đường tròn (A,a), (B,b), (C,c) (hình 74) thì chúng cắt đường tròn (O) phải dựng sao cho các bán kính OA' ⊥ AA', OB' ⊥ BB', OC' ⊥ CC'.

Do OA' = OB' = OC' nên điểm O có cùng phương tích đối với ba đường tròn, tức là O là tâm đẳng phương của (A,a), (B,b) và (C,c).

Bài toán chỉ có 1 nghiệm hình nếu O ở



H.75

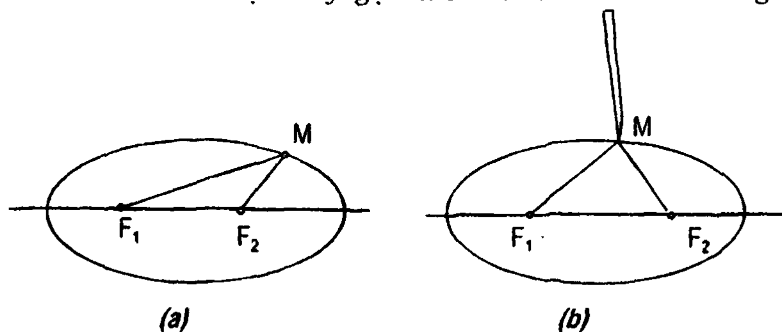
ngoài ba đường tròn để có thể xác định bán kính của đường tròn (O) bởi tiếp tuyến OA'.

Lưu ý: Muốn dựng nhanh trục đẳng phương của hai đường tròn (O) và (O') không có điểm nào chung (ngoài nhau) ta chỉ cần dựng một đường tròn thứ ba (I) cắt (O) và (O') tại A, B và C, D (hình 75). Từ giao điểm S của hai trục đẳng phương AB và CD ta kẻ đường vuông góc với OO', đường vuông góc này chính là trục đẳng phương của hai đường tròn (O) và (O').

C. Elip - Hypebol - Parabol

1. Elip. Quỹ tích những điểm M sao cho tổng các khoảng cách từ đó đến hai điểm cố định F_1 và F_2 bằng một số không đổi 2a (lớn hơn khoảng cách giữa hai điểm ấy) là một *elip* (hình 76a).

Hai điểm cố định ấy gọi là hai *tiêu điểm*. Khoảng cách



H.76

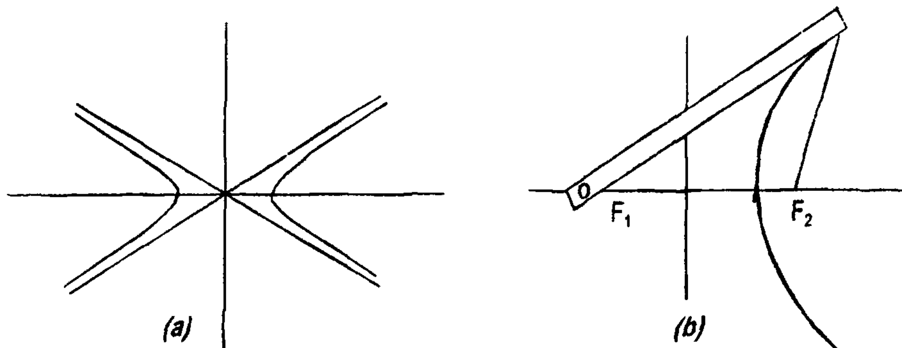
giữa hai tiêu điểm gọi là *tiêu cự*.

$MF_1 + MF_2 = 2a$

Muốn vẽ một elip ta dùng một sợi dây có chiều dài 2a, đỉnh hai đầu dây ở hai điểm F_1, F_2 cố định ($2a > F_1F_2$).

Dùng một bút chì căng dây ra và di chuyển bút chì sao cho dây luôn căng thì đầu bút chì sẽ vạch nên một elip (hình 76b).

2. *Hypebol.* Quỹ tích những điểm M sao cho giá trị tuyệt đối của hiệu các khoảng cách từ đó đến hai điểm cố định F_1 và F_2 bằng một số không đổi 2a (nhỏ hơn khoảng cách giữa hai điểm ấy) là một *hypebol* (hình 77a).



H.77

Hai điểm cố định ấy gọi là hai *tiêu điểm,* khoảng cách giữa hai tiêu điểm gọi là *tiêu cự.*

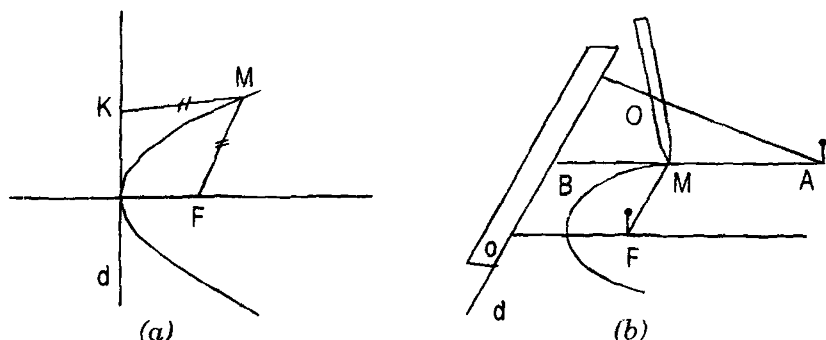
Muốn vẽ một hypebol ta lấy một cái thước có chiều dài l và một sợi dây có chiều dài l - 2a. Một đầu mút của thước quay quanh điểm F_1, đầu mút kia của thước đính với một đầu của sợi dây. Đầu dây kia đính ở điểm F_2 ($2a < F_1F_2 < l$).

Dùng một bút chì căng dây cho sát vào thước thì bút chì sẽ vạch nên một phần của một nhánh của hypebol (hình 77b).

3. *Parabol.* Quỹ tích những điểm M sao cho khoảng cách từ đó đến một điểm cho trước F bằng khoảng cách từ đó đến một đường thẳng d cho trước là một *parabol* (hình 78a).

Điểm F gọi là *tiêu điểm*, đường thẳng d gọi là *đường chuẩn* MF = MK.

Muốn vẽ một parabol, ta đặt một thước bẹt theo đường chuẩn d. Cho một êke trượt theo thước bẹt. Một sợi dây có độ dài bằng độ dài cạnh



H.78

AB của êke có một đầu dây đính ở đỉnh A của êke và đầu dây kia đính ở điểm F. Một đầu bút chì căng dây sát vào cạnh êke vẽ nên một phần của parabol có tiêu điểm F và đường chuẩn d vì ta luôn có MF = MB (hình 78b).

MỤC LỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản

Giám đốc: NGUYỄN VĂN THỎA
Tổng biên tập: NGUYỄN THIỆN GIÁP

Biên tập và sửa bài: TƯỜNG GIANG

Trình bày bìa: THU HÀ

BÀI TOÁN QUỸ TÍCH DỄ HAY KHÓ

Mã số: 01. 182.ĐH 2001 - 33.2001
In 1000 cuốn tại Công ty Sách và Thiết bị trường học Hải Phòng
Số xuất bản: 337 / 33 / CXB. Số trích ngang 329 KH/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý IV/2001

Giá: 6.000đ